Esercitazione ENS sulle finestre (22 Aprile 2008)

D. Donno

Esercizio 1: Separazione di due segnali

Si consideri un segnale $z(t)$ somma di due segnali $x(t)$ e $y(t)$ reali e di potenza simile, ciascuno con semi banda pari a $B_{x,y} = 100$Hz, ma diversa posizione spettrale (vedi la figura 1)

$$z(t) = x(t) + y(t),$$
$$y(t) = a(t)cos(2\pi f_0 t), \text{ con } f_0 = 300\text{Hz}$$

La frequenza di campionamento del segnale $z(t)$ è $f_c = 1000$Hz. Si vogliano separare i due segnali $x(t)$ e $y(t)$.

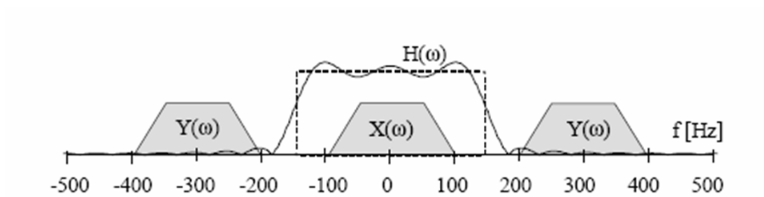

Figura 1: Risposta in frequenza del segnale $z(t)$.

a) Si trovi la risposta all'impulso $h(n)$ di un filtro ideale in grado di separare i due segnali.

b) Si tronchi la risposta all'impulso del filtro al punto (a) in modo da estrarre il segnale $X(f)$ con un'attenuazione dell'altro segnale superiore a 10dB. Trovare la lunghezza minima della finestra da usare.

Soluzione

a) Il filtro ideale per la separazione dei due segnali (e l'estrazione del segnale $X(f)$) è un filtro passa-basso con frequenza di taglio $f_T = 150$Hz (fecendo riferimento alla figura 1, 150Hz si trova a metà tra la banda del segnale $x(t)$ e quella del segnale $y(t)$). La banda del filtro ideale (normalizzata rispetto alla frequenza di campionamento f_c) è quindi $B = (2 \cdot 150)\text{Hz} / f_c = 300\text{Hz} / 1000\text{Hz} = 3/10$. La risposta all'impulso del filtro ideale è:

$$h(n) = h(0)\frac{\sin(3\pi/10n)}{(3\pi/10n)}.$$

b) Per garantire una reiezione di almeno 10dB è sufficiente utilizzare una finestra rettangolare che ha attenuazione in banda oscura di 13dB. La banda di transizione la considero pari a $\Delta f_{tr} = 100$Hz, che è la distanza tra i due segnali. La durata della finestra è determinata dalla larghezza della banda di transizione. Per una finestra rettangolare la banda di transizione è pari a $2/NT$, da cui:

$$\Delta f_{tr} = \frac{2}{NT} = 100Hz \Longrightarrow N = \frac{2}{100}f_c = 20$$

Quindi, considerando una banda di transizione di 100Hz (la più grande possibile in questo caso) la lunghezza del filtro è pari a 20 campioni.

Se invece volessi costruire un filtro più selettivo, con una banda di transizione pari, per esempio, a 10 Hz, avrei bisogno di un filtro lungo 200 campioni. Tanto più voglio un filtro selettivo, tanto più ne aumento la lunghezza.

Esercizio 2: Filtro passa-banda e finestra triangolare

Si consideri il filtro $H(\omega)$ passa-banda complesso con larghezza di banda $\Delta\omega = \pi/2$ e frequenza centrale $\omega_0 = \pi/2$.

a) Si calcoli la risposta all'impulso $h(n)$ del filtro passa-banda ideale (con banda passante tra $\pi/4$ e $3\pi/4$) e fornire una rappresentazione grafica di $h(n)$.

b) Si finestri la risposta all'impulso del filtro in modo che il massimo lobo laterale abbia un'ampiezza inferiore al 10% del valore massimo. Inoltre la banda di transizione sia inferiore a $\Delta\omega/5$.

Soluzione

a) Il filtro passa-banda ideale complesso con frequenza centrale $\omega_0 = \pi/2$ lo posso costruire a partire della risposta all'impulso del filtro passa-basso ideale con uguale larghezza della banda passante:

$$h(n) = h_{LP}(n)\exp(j\frac{\pi}{2}n).$$

La banda del filtro passa-basso $h_{LP}(n)$ è $B = \Delta\omega/2\pi = 1/4$. Da cui la risposta all'impulso del filtro passa-basso ideale è:

$$h_{LP}(n) = h(0)\frac{\sin(\pi n/4)}{(\pi n/4)}$$

e sostituendo, trovo la risposta all'impulso del filtro passa-banda ideale $h(n)$:

$$h(n) = h_{LP}(n)\exp(j\frac{\pi}{2}n) = h(0)\frac{\sin(\pi n/4)}{(\pi n/4)}\exp(j\frac{\pi}{2}n).$$

Si noti che nella rappresentazione grafica della risposta all'impulso $h(n)$ bisogna anche tenere conto di un termine di fase non nullo.

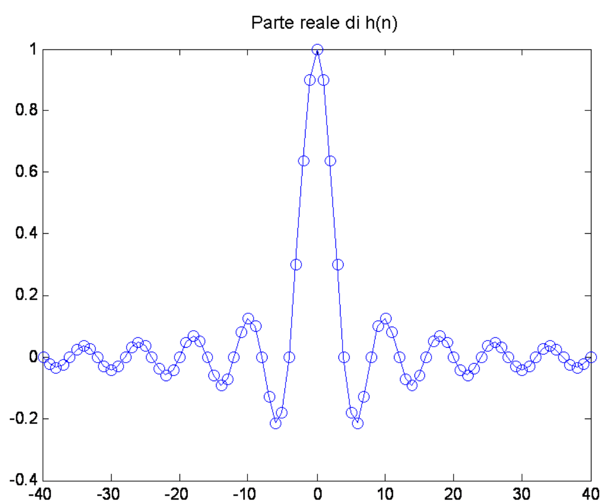

Figura 2: Parte reale della risposta all'impulso del filtro passa-banda

b) La richiesta di avere massimo lobo laterale con ampiezza inferiore al 10% del valore massimo, equivale a richiedere un'attenuazione del filtro di almeno 20dB. Una finestra opportuna che garantisca questa attenuazione è la finestra triangolare. Il numero di campioni della finestra triangolare lo trovo imponendo:

$$\frac{4}{N} = \Delta f_{tr} \leq \frac{1}{2\pi}\frac{\Delta\omega}{5} = \frac{1}{20} \Longrightarrow \frac{1}{20} \geq \frac{4}{N} \Longrightarrow N \geq 80$$

La risposta all'impulso finestrata del filtro passa-banda risulta essere:

$$\tilde{h}(n) = h(n)w(n) = h(0)\frac{\sin(\pi n/4)}{(\pi n/4)}\exp(j\frac{\pi}{2}n)\left(1 - \frac{|n|}{40}\right), \text{ per } \quad n = -40, \ldots + 39$$

Esercizio 3: Sintesi di un filtro a partire dalle specifiche di maschera

Si voglia realizzare un filtro passa-banda reale con le seguenti specifiche di maschera (tutte le frequenze sono normalizzate):

- frequenza centrale $f_0 = 0.25$
- larghezza della banda passante pari a 0.25 (in frequenze normalizzate)
- banda di transizione $\Delta f = 0.05$
- attenuazione $A = 10\log_{10}(\delta^2) = -25$dB in banda oscura

a) Si determini la risposta all'impulso $h(n)$ del filtro passa-banda che rispetti le specifiche di progetto.
b) Si voglia creare il filtro passa-basso con le specifiche al punto a) usando il filtro di Butterworth
c) Nel caso del filtro passa-basso, si determini la lunghezza del filtro nell'ipotesi che sia un filtro ottimizzato secondo Remez e la cui lunghezza sia deducibile dalla formula

$$M \simeq 0.66\frac{f_c}{\Delta f}\log_{10}\frac{1}{10\delta_1\delta_2}$$

Soluzione

a) Imposto il progetto del filtro partendo da un filtro passa-basso $H_{LP}(f)$ e poi lo traslo in frequenza per ottenere il filtro passa-banda

$$H(f) = H_{LP}(f - f_0) + H_{LP}(f + f_0) = H_{LP}(f) * [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$

da cui la risposta all'impulso del filtro passa-banda risulta essere

$$h(n) = h_{LP}(n) \;\; 2\cos(2\pi f_0 n) = h_{LP}(n) \;\; 2\cos(\frac{\pi}{2}n)$$

La risposta all'impulso del filtro passa-basso $h_{LP}(n)$ è

$$h_{LP}(n) = \tilde{h}_{LP}(n)w(n)$$

dove $\tilde{h}_{LP}(n)$ è il filtro passa-basso ideale e $w(n)$ è la finestra con cui lo rastremo per venire incontro alle specifiche di maschera. La frequenza di taglio del filtro passa-basso ideale $\tilde{h}_{LP}(n)$ è $f_T = 1/8 + 1/40 = 3/20$. Da cui la banda del filtro ideale è $B = 3/10$. Quindi:

$$\tilde{h}_{LP}(n) = h(0)\frac{\sin(3\pi n/10)}{(3\pi n/10)}$$

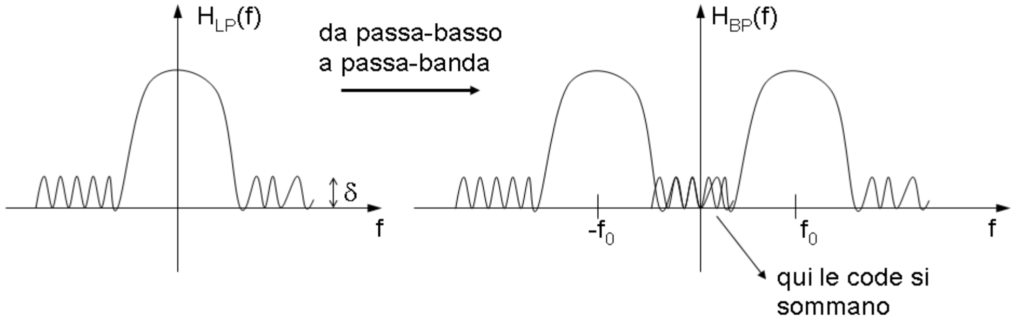

Figura 3: Da passa-basso a passa-banda.

Per quanto riguarda la scelta della finestra $w(n)$, come si vede in figura 3, bisogna fare attenzione alle code del filtro passa-banda che si sommano in banda oscura. Se con il filtro passa-basso si aveva un'attenuazione pari a δ, nel caso del passa-banda l'attenuazione diventa pari a 2δ.

Se passa-basso è tale che: $10\log_{10}(\delta^2) = -25\text{dB}$, allora per il passa-banda si ha che $10\log_{10}(2\delta)^2 = 10\log_{10}(4\delta^2) = (6-25)\text{dB}$. Quindi perderei 6dB di attenuazione. Per recuperarli sposto la richiesta di attenuazione del filtro passa-basso a -31dB.

Per rispettare le specifiche di attenuazione di 31dB devo usare una finestra a coseno rialzato formata da 80 campioni, poichè

$$\Delta f = \frac{1}{20} \geq \frac{4}{M} \Longrightarrow M \geq 80$$
$$w(n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(\frac{2\pi}{80}n)$$

Quindi il filtro passa-banda finale è

$$h(n) = h(0)\frac{\sin(3\pi n/10)}{(3\pi n/10)}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(\frac{2\pi}{80}n)\right]2\cos(\frac{\pi}{2}n) \qquad n = -39, ..., 40$$

b) Il filtro passabasso di Butterworth di ordine N e frequenza di taglio Ω_0, ha la funzione di trasferimento

$$\mid H(\Omega) \mid^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_0}\right)^{2N}}$$

Bisogna trovare Ω_0 e N per soddisfare la maschera in figura 4.

Per progettarlo trasformo le specifiche nell'analogico usando la trasformazione

$$\Omega = \frac{2}{T}\tan\left(\frac{\omega}{2}\right) \qquad \text{con } T \text{ arbitraria}$$

Pongo $T = 2$.

$$\Omega_1 = \tan\left(\tfrac{2\pi}{2}\tfrac{1}{8}\right) \simeq 0.41$$

$$\Omega_2 = \tan\left(\tfrac{2\pi}{2}\tfrac{7}{40}\right) \simeq 0.61$$

L'ampiezza in banda oscura è $\delta_2 = 10^{-\frac{31}{20}} \simeq 0.0282$, da cui posso scrivere l'uguaglianza che fissa a 31dB l'attenuazione del filtro per $\Omega \geq \Omega_2$

$$\frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_0}\right)^{2N}} = 0.0282^2 \qquad (1)$$

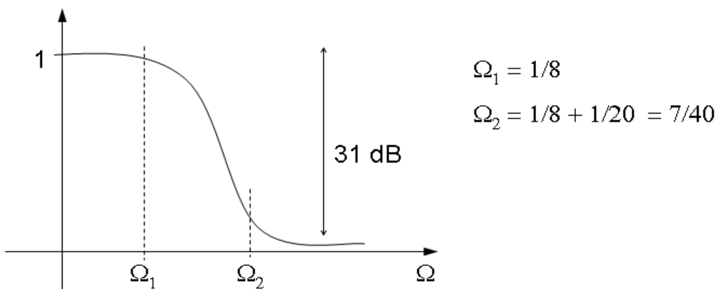

Figura 4: Maschera per passa-basso.

In corrispondenza della banda passante suppongo di avere ripple $\delta_1 = 10^{-3}$. Quindi impongo

$$\frac{1}{1+\left(\frac{\Omega_1}{\Omega_0}\right)^{2N}} = (1-\delta_1)^2 \simeq 1-\delta_1 \tag{2}$$

Risolvendo il sistema formato dalle due equazioni (1) e (2), trovo le due incognite

$$N \simeq 21$$
$$\Omega_0 \simeq 0.147$$

c) Sostituendo tutti i valori opportuni nella formula di Remez si ottiene

$$M \simeq 0.66\frac{f_c}{\Delta f}\log_{10}\frac{1}{10\delta_1\delta_2} \simeq 0.66\frac{1}{1/20}\log_{10}\frac{1}{10\ 10^{-3}\ 0.0282} \simeq 47$$