

# Fondamenti di ELABORAZIONE NUMERICA DEI SEGNALI



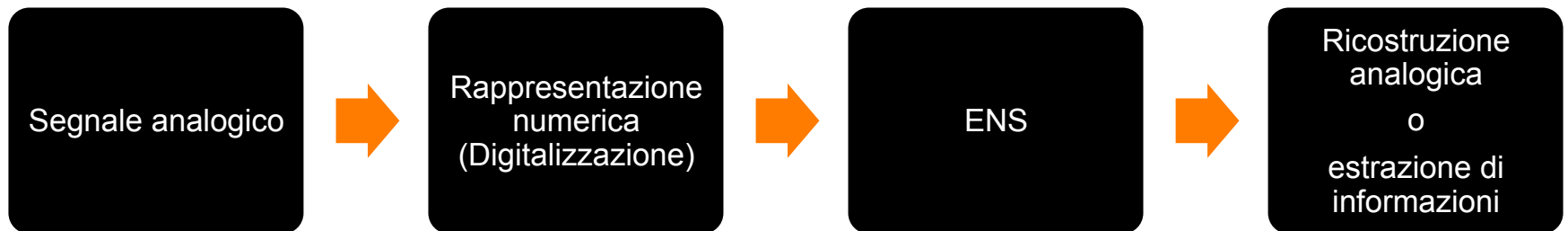
# Elaborazione Numerica dei Segnali (ENS)

- Cosa è?
- Perché?
- Dove?

# ENS – Cosa è?

- L'elaborazione numerica dei segnali è la applicazione di una sequenza opportuna di operazioni aritmetiche o logiche (algoritmo) ad una serie numerica (es. cifre espresse in forma binaria) che rappresenta (in modo esatto o sufficientemente approssimato) un segnale (in genere originariamente analogico)
- Con lo scopo (elaborazione) di modificarlo, di migliorarne la qualità o di estrarne delle informazioni

# Schema di principio della ENS



# ENS – Perché?

## PRO

- Universalità, flessibilità, estesa gamma di (nuove) elaborazioni realizzabili
- Programmabilità (processori digitali, es. DSP)
- Precisione facilmente controllabile con il numero di bit usati
- Realizzazioni più facilmente riproducibili : HW dedicato (es. VLSI-Very Large Scale Integration) o logica programmabile (DSP- Digital Signal Processor; FPGA-Flexible Programmable Gate Arrays); trascurabili effetti termici e di invecchiamento
- Compatibilità maggiore con i sistemi già numerici (ad es. comunicazioni numeriche, dati,...)

## CONTRO

- Velocità di elaborazione: può essere limitata dalla complessità algoritmica e dalla tecnologia
- Consumi di potenza (spesso, ma non sempre) superiori ad ‘equivalenti’ soluzioni analogiche

# ENS – Dove?



- File multimediali: CD, DVD, MP3, JPEG, MPEG,.....



- Smart-phone: Trasmissione radio, codifica audio, immagini e video; GPS; Sensori



- TV digitale terrestre e satellitare (DVB)



- Applicazioni: telecomunicazioni, biomedica, sismica, disabili, automazione industriale, traffico, sonar e radar, array di sensori, stime spettrali, etc.

...e ...in futuro..



.... ovunque (pervasiva)

# FENS – Contenuto del corso

- Digitalizzazione dei segnali e DFT (richiami)
- Sistemi discreti lineari tempo-invarianti
- Progetto di filtri
- Sistemi a frequenza di campionamento variabile
- Realizzazione di sistemi di ENS
- Elaborazione statistica dei segnali

## Libri di testo

F.Argenti, L.Mucchi, E.Del Re, “*ELABORAZIONE NUMERICA DEI SEGNALI. Teoria, esercizi ed esempi al calcolatore*”, McGraw-Hill, 2011.

## Altro materiale sulla pagina web del corso

[home.dei.polimi.it/tubaro/FENS/](http://home.dei.polimi.it/tubaro/FENS/)

## Esempi di segnali

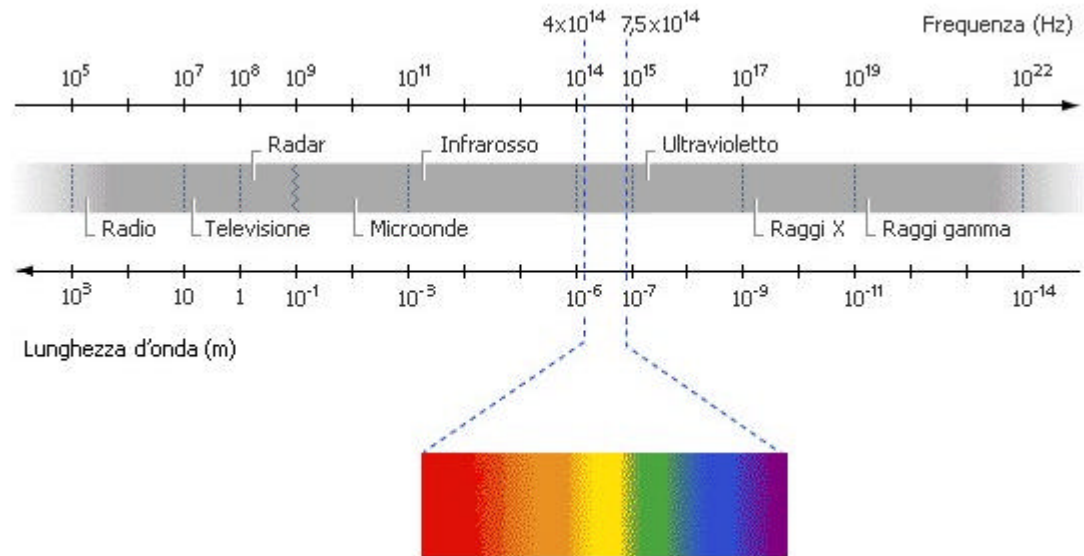
Voce:

qualità telefonica 0-4 kHz

qualità migliorata 0-7 kHz

Audio (es. musica): 0-20 kHz

### Spettro elettromagnetico



Biomedica: 0-200 Hz

Sismica: 0-1000 Hz

Nota: ENS applicata anche a segnali bidimensionali (immagini) e video

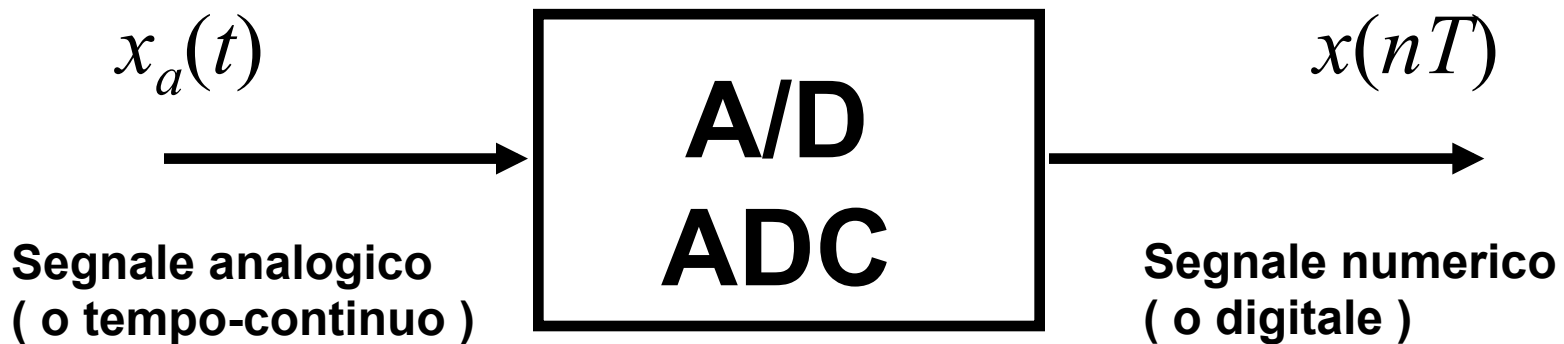




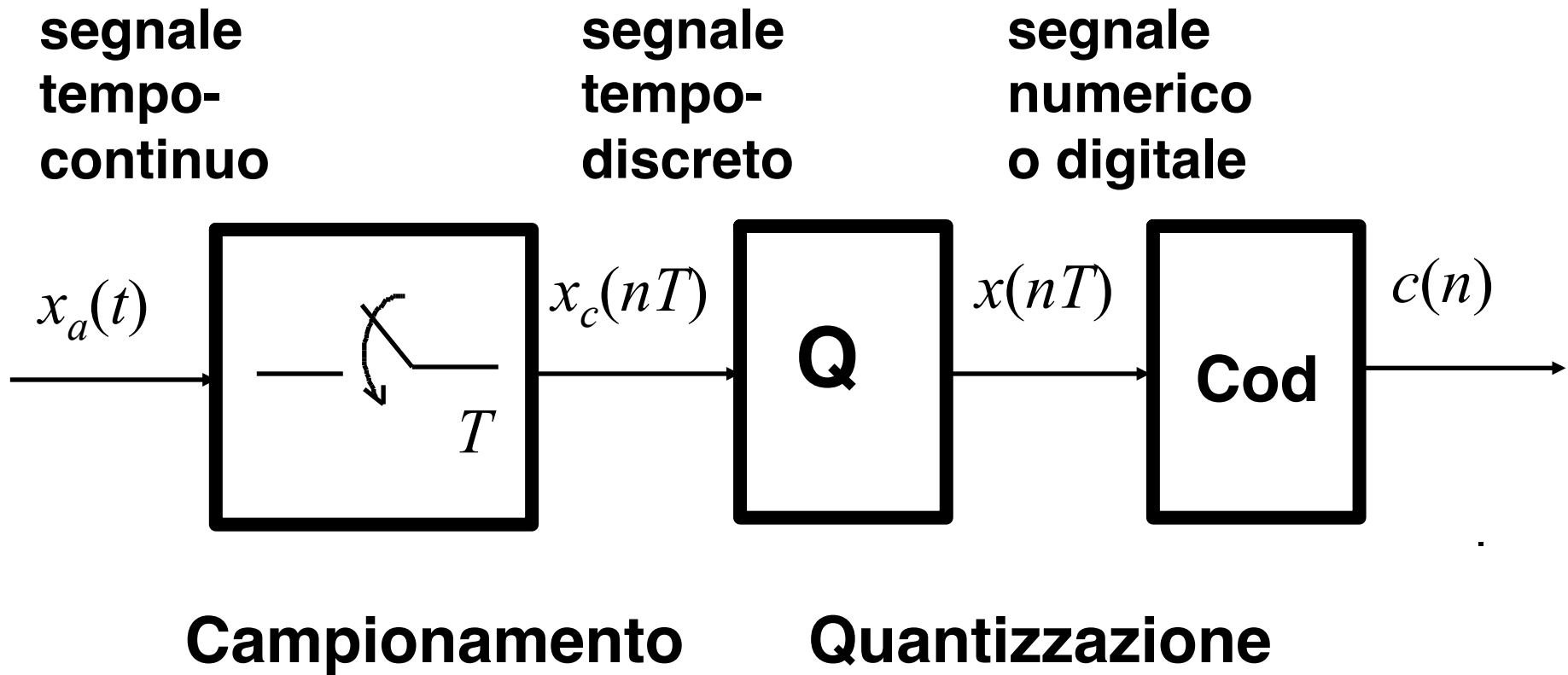
# **DIGITALIZZAZIONE DEI SEGNALI**

[Cap. 1]

# Conversione analogico - digitale



# Due operazioni:



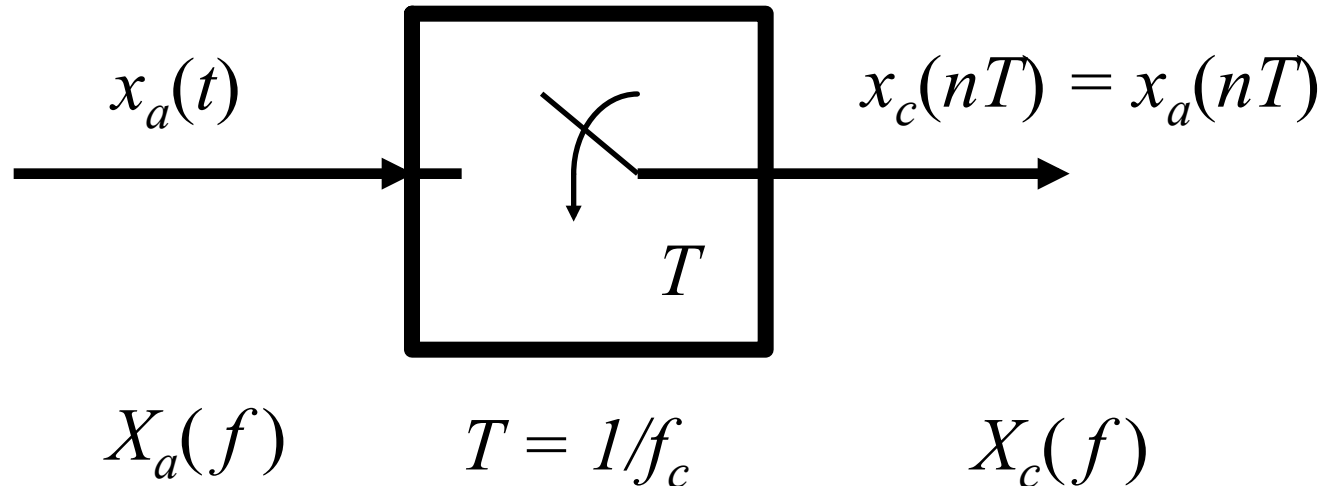
## Campionamento

*in teoria* può non introdurre  
degradazione sul segnale

## Quantizzazione

introduce comunque un errore  
(*errore di quantizzazione*)

# CAMPIONAMENTO IDEALE



**Ideale:**

**tempo istantaneo di chiusura dell'interruttore  
con passo di campionamento  $T$  (frequenza di  
campionamento  $f_c = 1/T$  )**

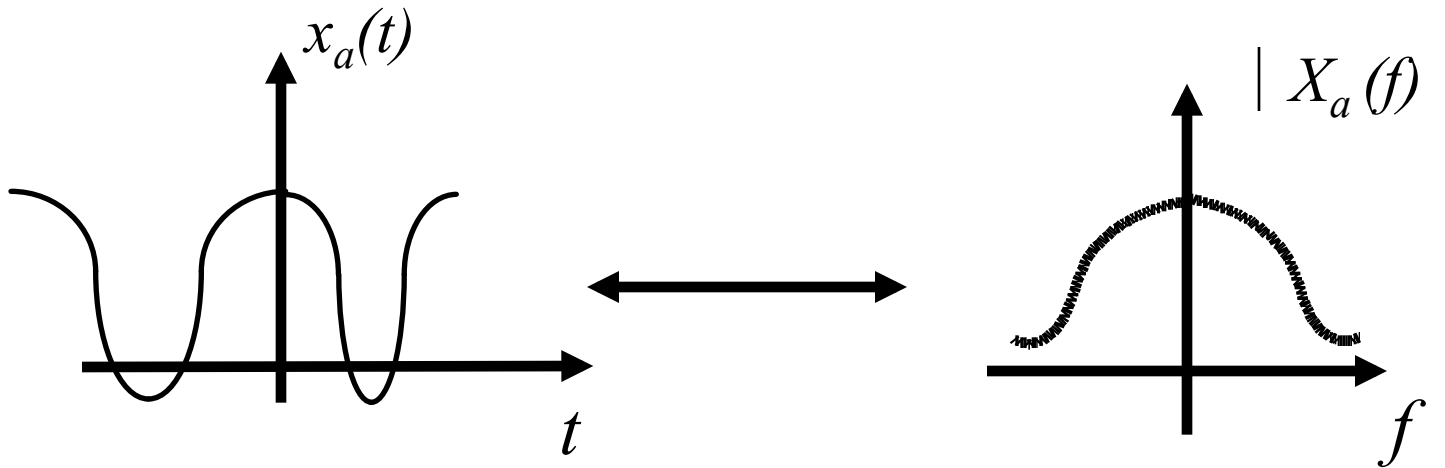
# Relazioni tempo-frequenza (Trasformata di Fourier)

[Cap. 1.6-1.8]

## ***Segnale continuo***

$$X_a(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_a(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad \text{spettro (T.F. diretta)}$$

$$x_a(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X_a(f) e^{j2\pi ft} df \quad \text{(T.F. inversa)}$$



## Segnale discreto

$$\begin{aligned} X_c(f) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT) e^{-j2\pi f nT} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT) e^{-j2\pi F n} \\ &= X_c(F) \end{aligned}$$

***T.F. diretta***  
**(tempo-discreta)**  
**DTFT**

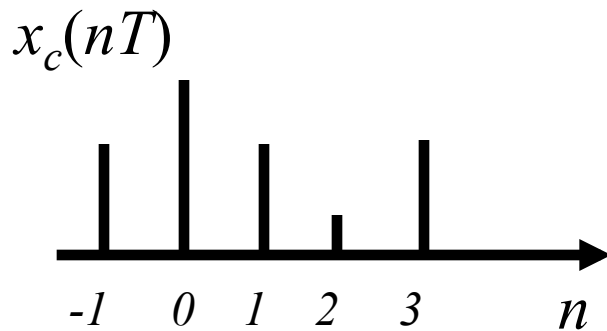
$$F = fT = \frac{f}{f_c} \quad \text{frequenza normalizzata}$$

*(è quella che conta nella ENS!)*

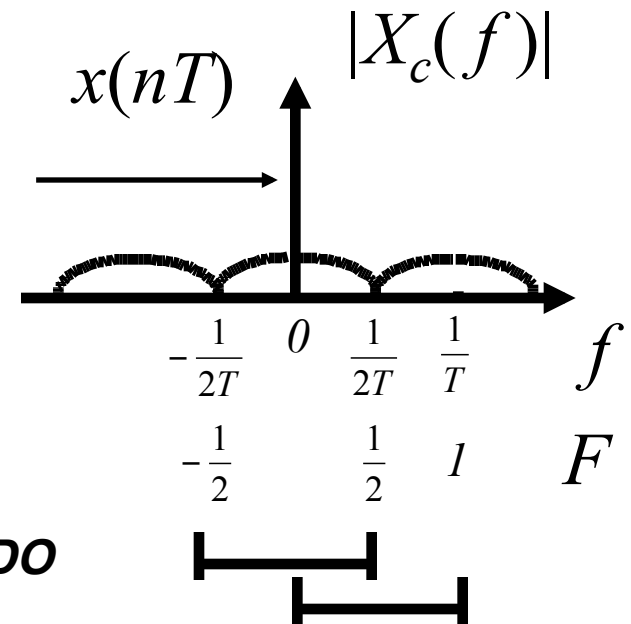


$$\begin{aligned}
 x_c(nT) &= T \int_{-1/2T}^{1/2T} X_c(f) e^{j2\pi f nT} df \\
 &= \int_{-1/2}^{1/2} X_c(F) e^{j2\pi F n} dF \\
 &= \int_0^1 X_c(F) e^{j2\pi F n} dF
 \end{aligned}$$

**T. F. inversa**



$$\sum_n x_c(nT) \delta(t-nT)$$



# Osservazioni

- **Dimensioni diverse per  $X_a(f)$  e  $X_c(f)$**
- **$X_c(f)$  non sempre esiste (serie non convergente)**

**Condizione sufficiente:**

$$\sum_n |x_c(nT)| < \infty \quad (\text{serie assolutamente sommabile})$$

- **$X_c(f)$  periodica di periodo  $f_c = 1/T$   
ovvero  
 $X_c(F)$  periodica di periodo  $1$**

- **Banda utile** del segnale campionato:  
per definizione quella compresa fra:

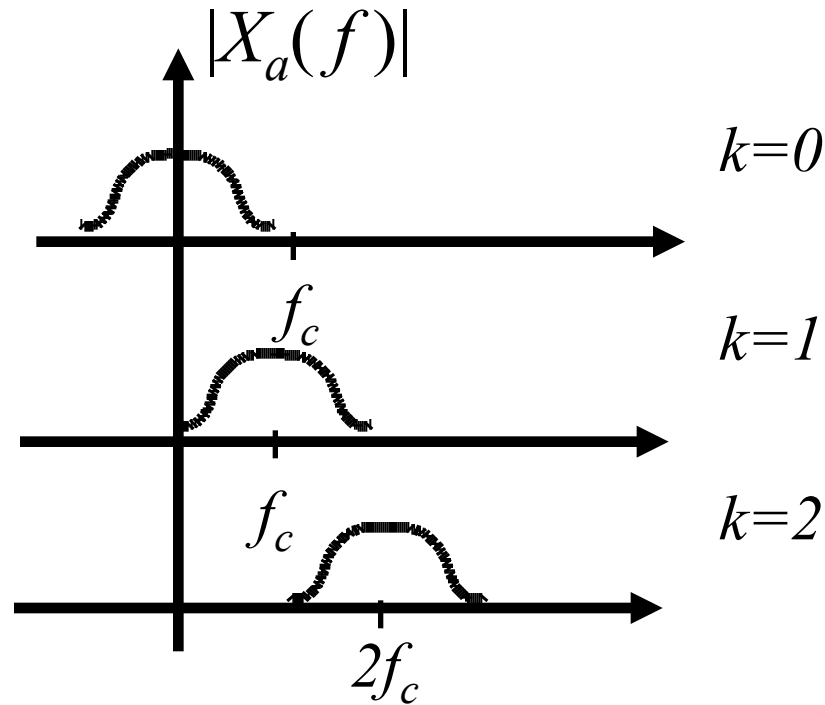
$$|f| \leq \frac{f_c}{2} \quad \text{ovvero} \quad |F| \leq \frac{1}{2}$$

# **Teorema del campionamento**

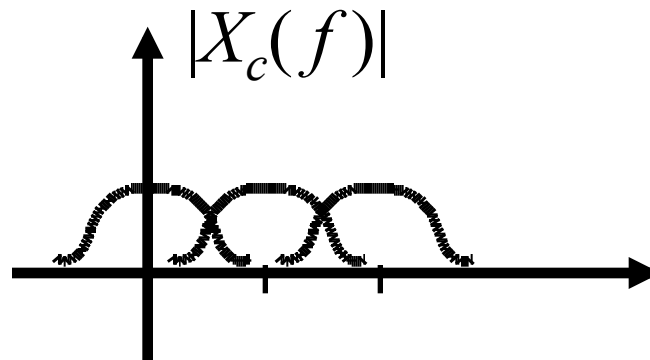
**Relazione fra  $X_c(f)$  e  $X_a(f)$**

$$X_c(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_a(f - k f_c)$$

**$X_c(f)$  è la somma di un numero infinito di repliche dello spettro di  $x_a(t)$ , ciascuna traslata di un multiplo intero della frequenza  $f_c$**



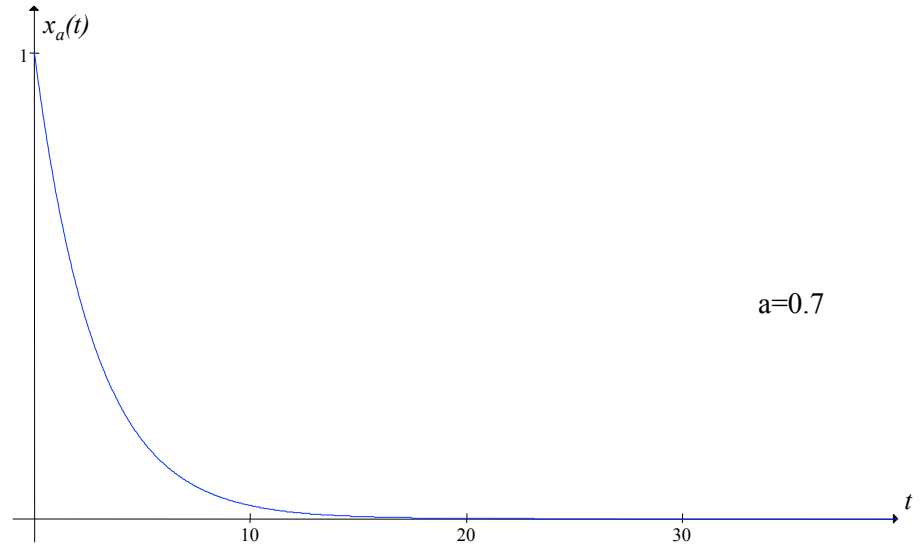
*N.B.: si sommano le funzioni complesse (non i moduli)*



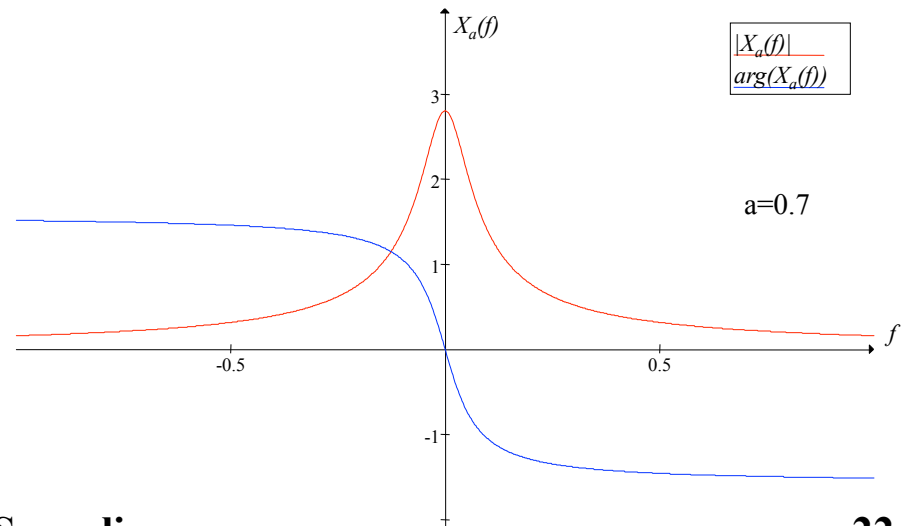
**N.B.: può presentarsi il fenomeno detto *aliasing* o sovrapposizione spettrale (distorsione spettrale)**

# Esempio 1:

$$x_a(t) = a^t u(t) \quad , a < 1$$

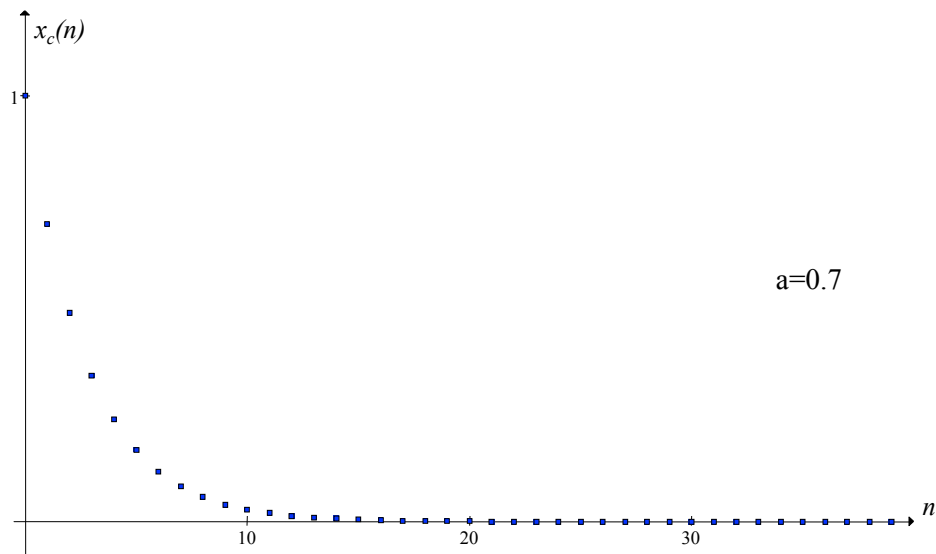


$$X_a(f) = \frac{1}{j2\pi f - \ln a}$$

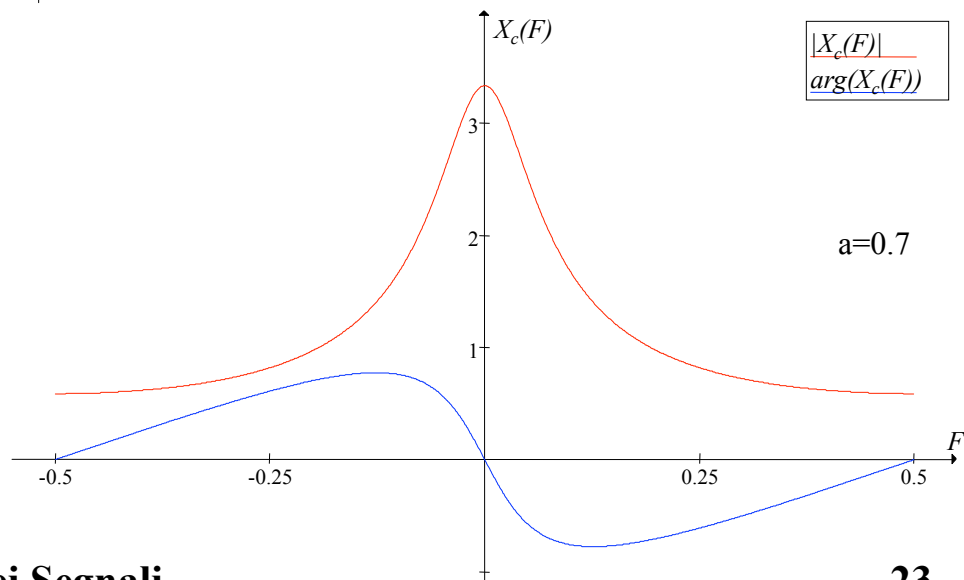


$$T = 1$$

$$x_c(n) = a^n u(n) \quad , a < 1$$



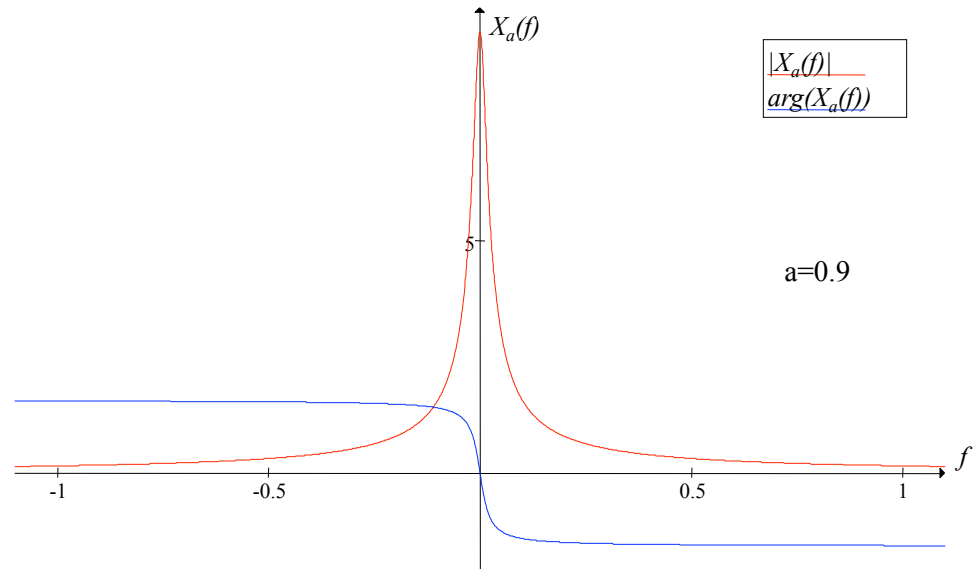
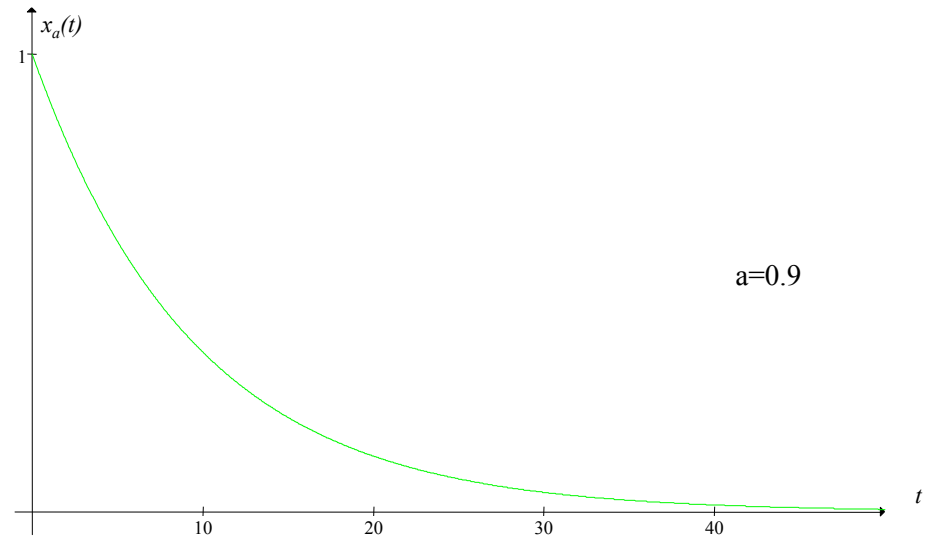
$$X_c(F) = \frac{1}{1 - a \cdot e^{-j2\pi F}}$$



## Esempio 2:

$$x_a(t) = a^t u(t) \quad , a < 1$$

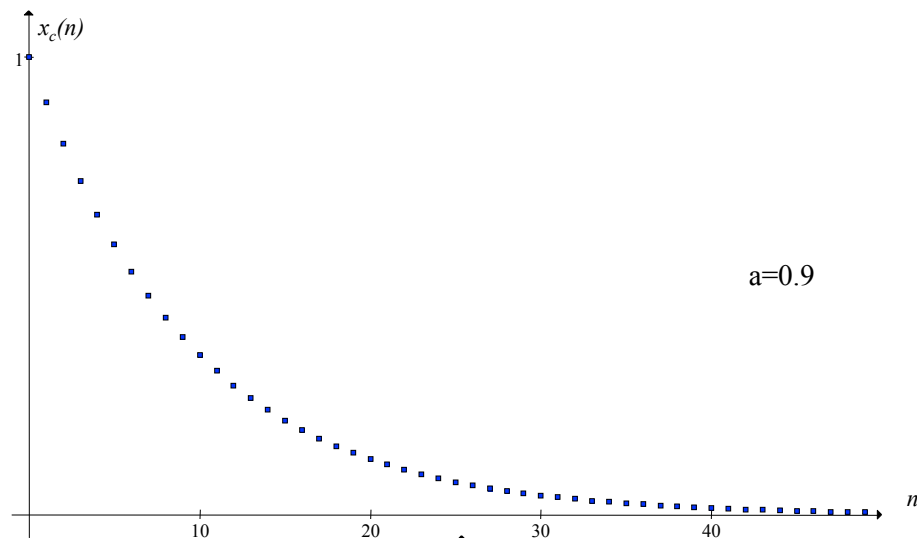
$$X_a(f) = \frac{1}{j2\pi f - \ln a}$$



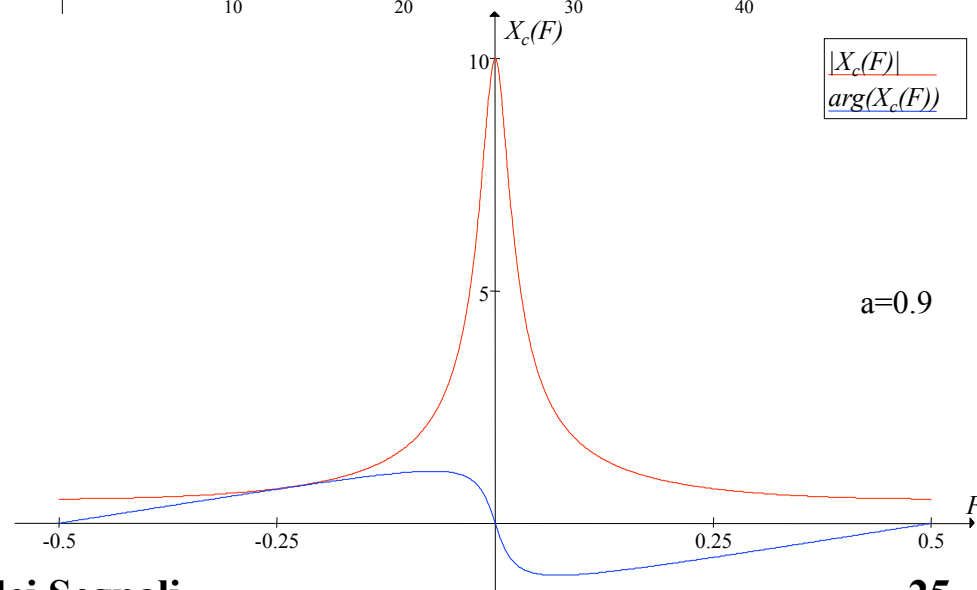


$$T = 1$$

$$x_c(n) = a^n u(n) \quad , a < 1$$



$$X_c(F) = \frac{1}{1 - a \cdot e^{-j2\pi F}}$$



# Condizione di assenza di distorsione spettrale (*condizione di Nyquist*)

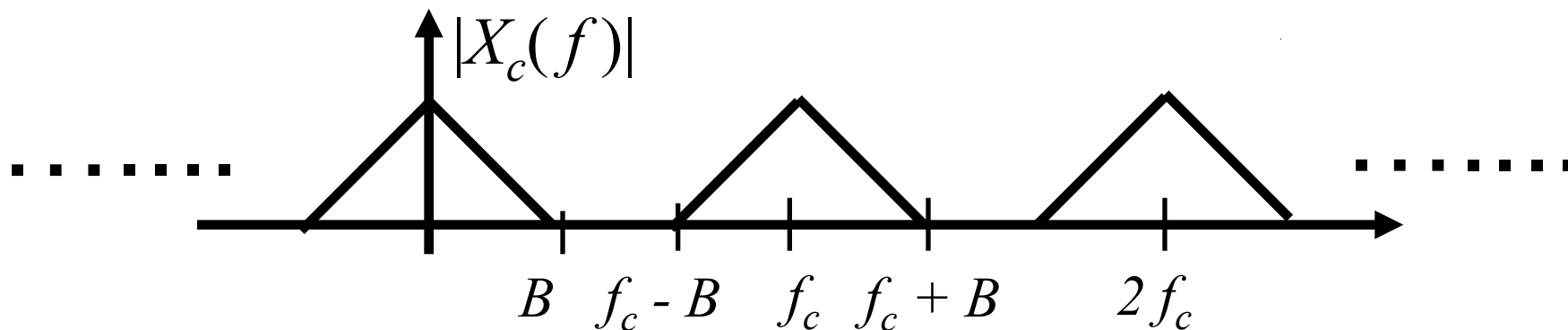
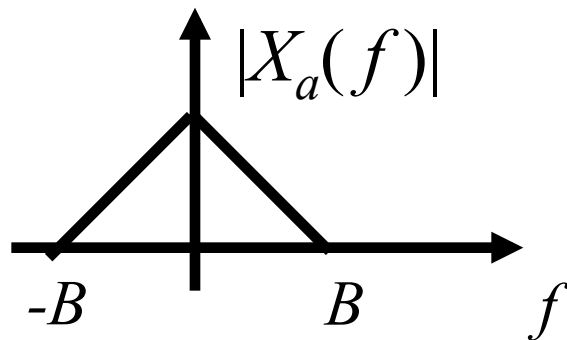
**1)** segnale limitato in banda  $B$

$$X_a(f) = 0 \quad \text{per } |f| > B$$

**2)**  $f_c > 2B$  (*frequenza di Nyquist*)

**(1 e 2)**  $\longrightarrow$  repliche disgiunte in frequenza

c



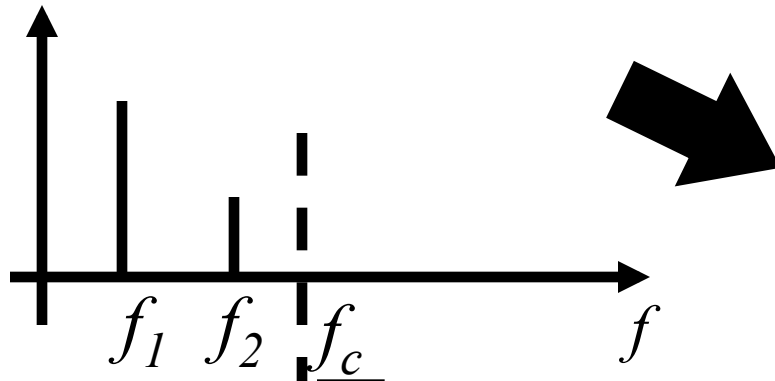
**Banda di guardia:**  $f_c - 2B$  (necessaria in pratica)

**Se 1 o 2 non sono **entrambe** verificate:  
parziale o totale sovrapposizione delle  
repliche (distorsione spettrale dovuta al  
campionamento)**

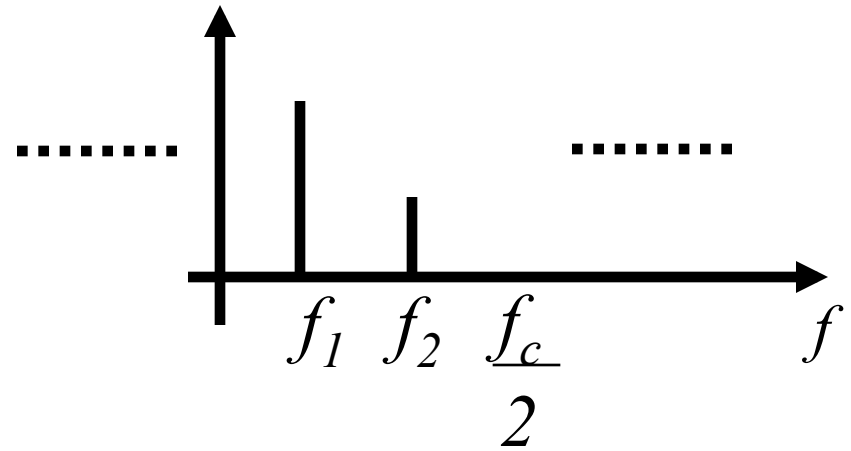
# Esempio

Segue dal teorema del campionamento che campionando a  $f_c$  i due segnali reali continui (sinusoidi):

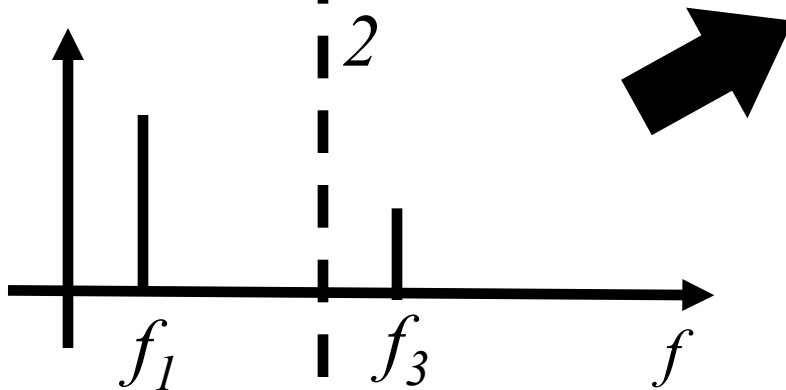
**segnale continuo**



**segnale discreto**



*(mostrate solo le frequenze positive)*

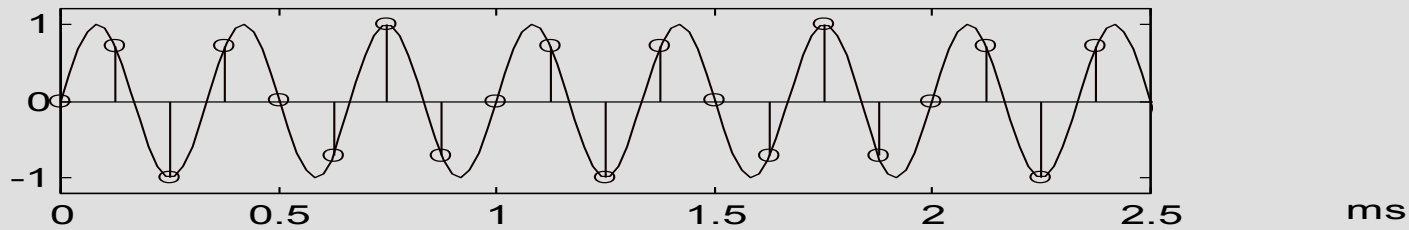


**Se** 
$$f_3 - \frac{f_c}{2} = \frac{f_c}{2} - f_2$$

**dopo il campionamento le frequenze  $f_2$  e  $f_3$  sono indistinguibili**

### **Osservazione**

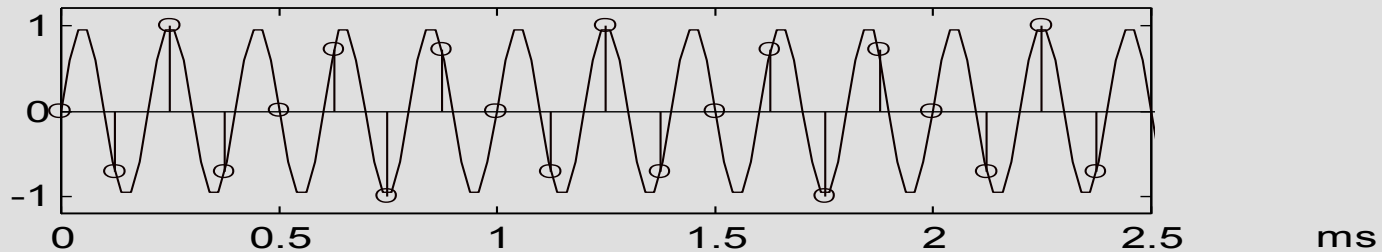
**➤ tutte le frequenze oltre  $f_c/2$  sono ribaltate nella banda utile**



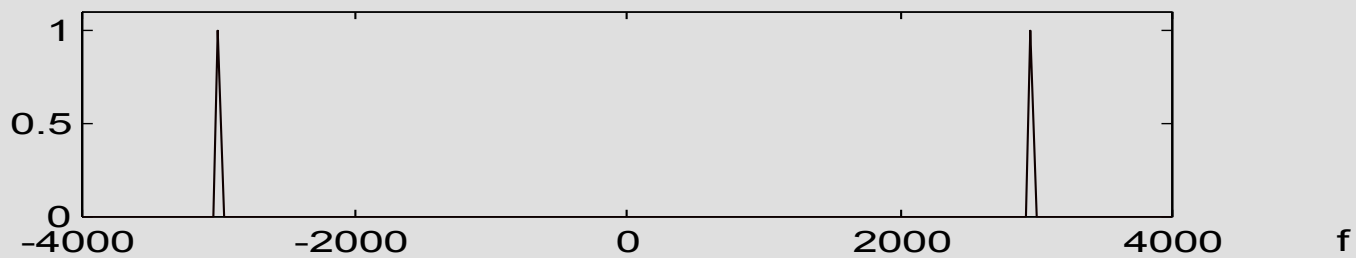
$f_1 = 3000, f_c = 8000$



Sinusoide a frequenza  $f_1=3000$  Hz correttamente campionata a  $f_c=8000$  Hz.  
Lo spettro risultante è corretto



$f_1 = 5000, f_c = 8000$

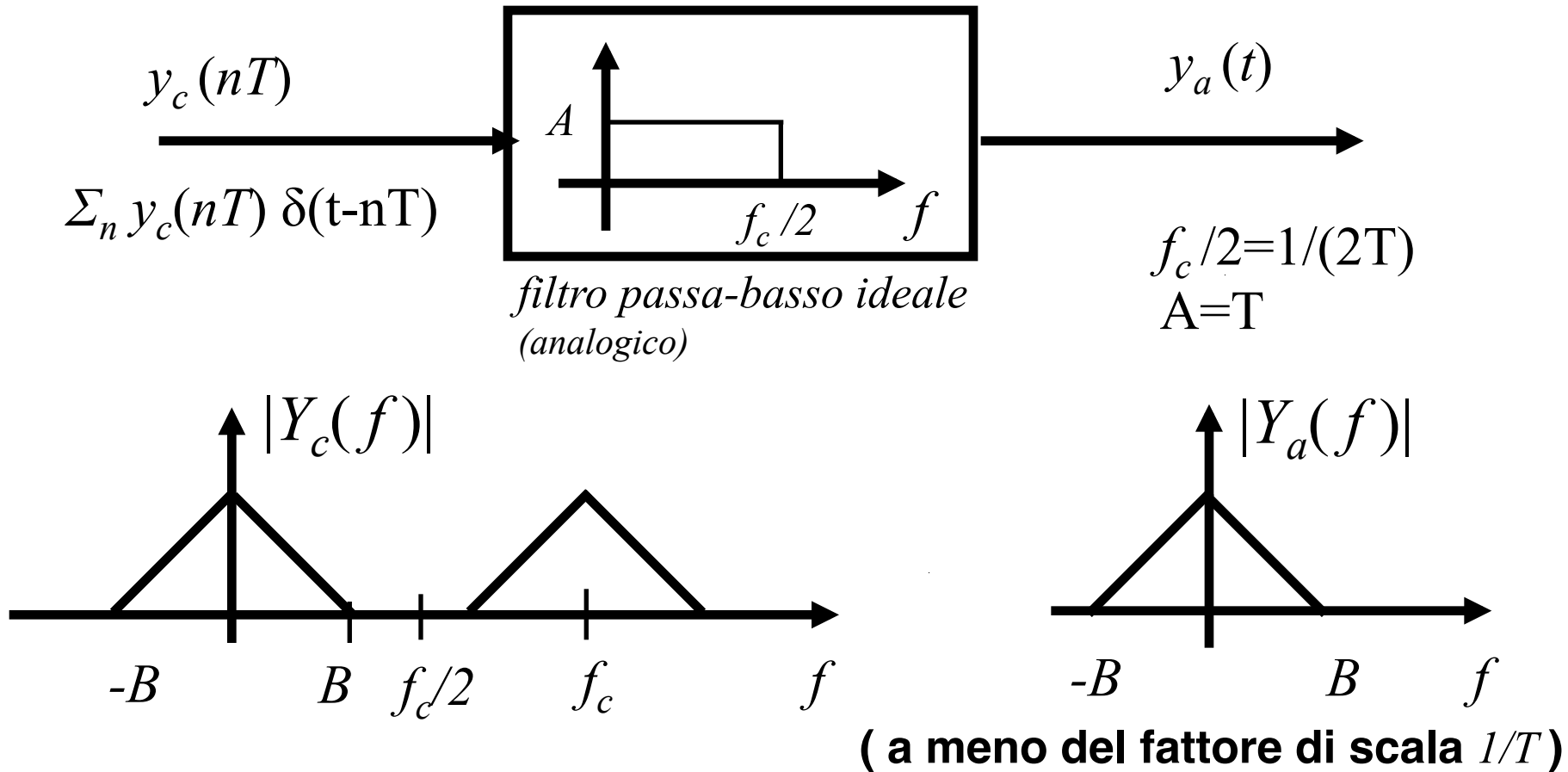


Sinusoide a frequenza  $f_1=5000$  Hz campionata a  $f_c=8000$  Hz.  
La sinusoide appare ribaltata rispetto a  $f_c/2$ .

# Ricostruzione del segnale analogico



Idealmente:



**Osservazione:**

**Se  $y_c(nT) = x_c(nT)$  i campioni sono una rappresentazione equivalente del segnale analogico originario se le condizioni **1 e 2** sono verificate**



## Formula di ricostruzione

**Per ottenere il segnale continuo dai suoi campioni:**

$$y_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y_c(nT) \frac{\text{sen} \pi f_c(t - nT)}{\pi f_c(t - nT)}$$

# RICHIAMI DEL CAMPIONAMENTO DI SEGNALI ALEATORI

[per approfondimenti App. A]

$x_a(t)$  **segnale aleatorio (processo casuale)**

•  $x_c(nT)$  **ha la stessa densità di probabilità di  $x_a(t)$**

• **segnali stazionari in senso lato**

$$E\{ x_c(nT) \} = m_x \quad \textit{media}$$

$$E\{ x_c(nT)x_c(nT + mT) \} = r_x(mT) \quad \textit{autocorrelazione}$$

$r_x(mT)$  **corrisponde al campionamento della autocorrelazione continua  $r(\tau)$  di  $x_a(t)$**

- **Spettro di potenza**  $G_x(f)$  di  $x_c(nT)$

$G_x(f)$  è la Trasformata di Fourier di  $r_x(mT)$

Se  $G_a(f)$  è lo spettro di potenza di  $x_a(t)$ ,  
cioè la trasformata di Fourier di  $r(\tau)$ , si ha

$$G_x(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_a(f - k f_c)$$

- **Sequenze stazionarie ed ergodiche**

Quelle per cui coincidono le medie temporali e  
le medie di insieme

- **Sequenze a spettro bianco**

$$r_x(mT) = r_x(0) \delta(mT) \longleftrightarrow \begin{aligned} G_x(f) &= \text{costante} = r_x(0)T \\ G_x(F) &= r_x(0) \end{aligned}$$

- **Potenza di una sequenza (a media nulla)**

$$S_x = E \{ x_c^2(nT) \} = r_x(0)$$

**che coincide con la varianza  $\sigma_x^2$  della sequenza**

# QUANTIZZAZIONE

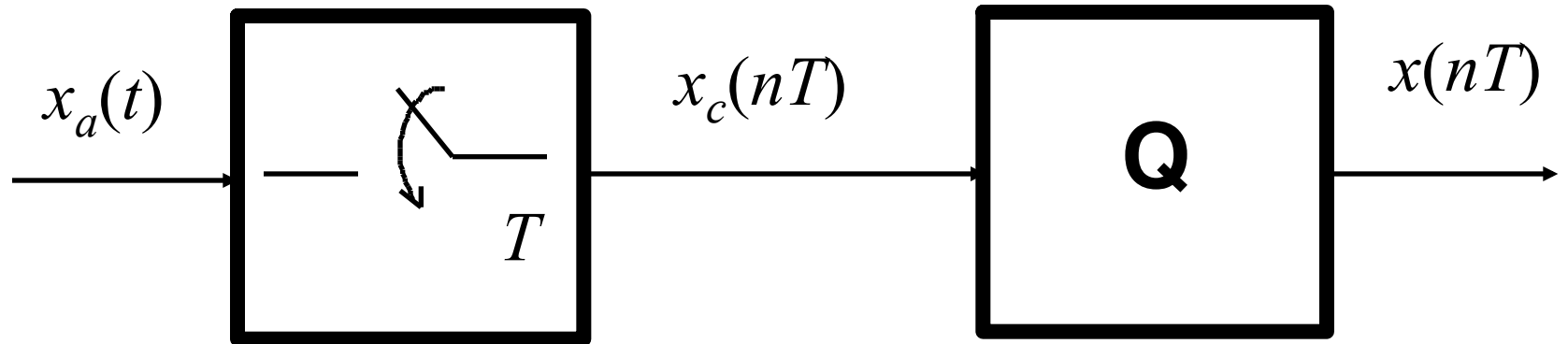
[Cap. 1.5]

# Due operazioni:

segnale  
tempo-  
continuo

segnale  
tempo-  
discreto

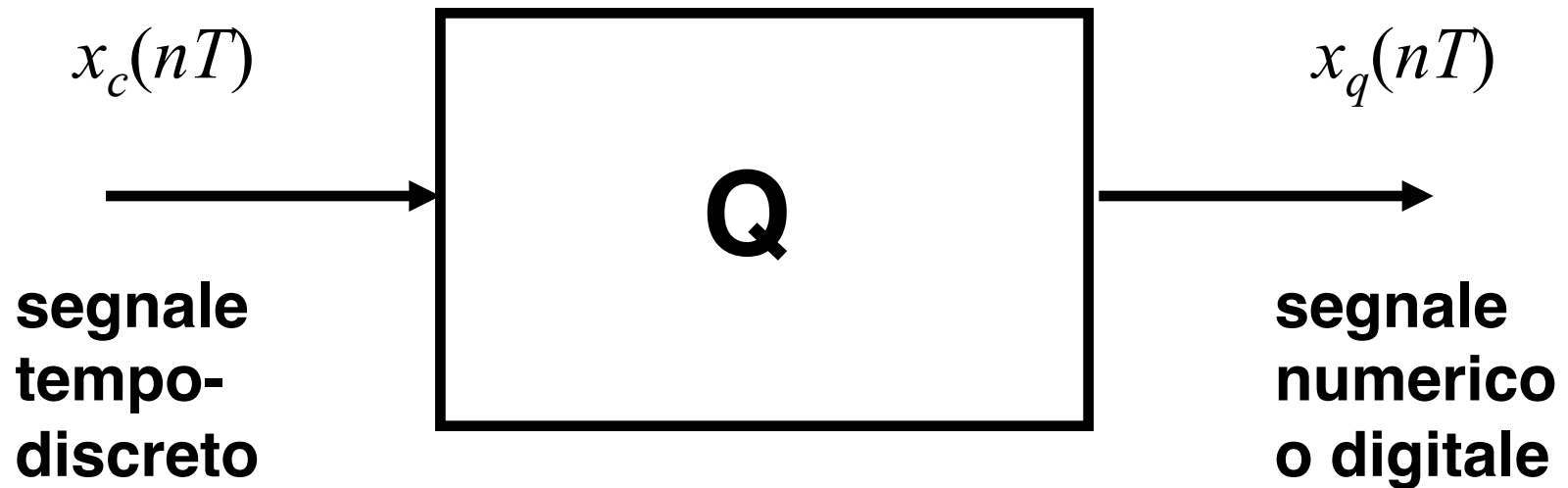
segnale  
numerico  
o digitale



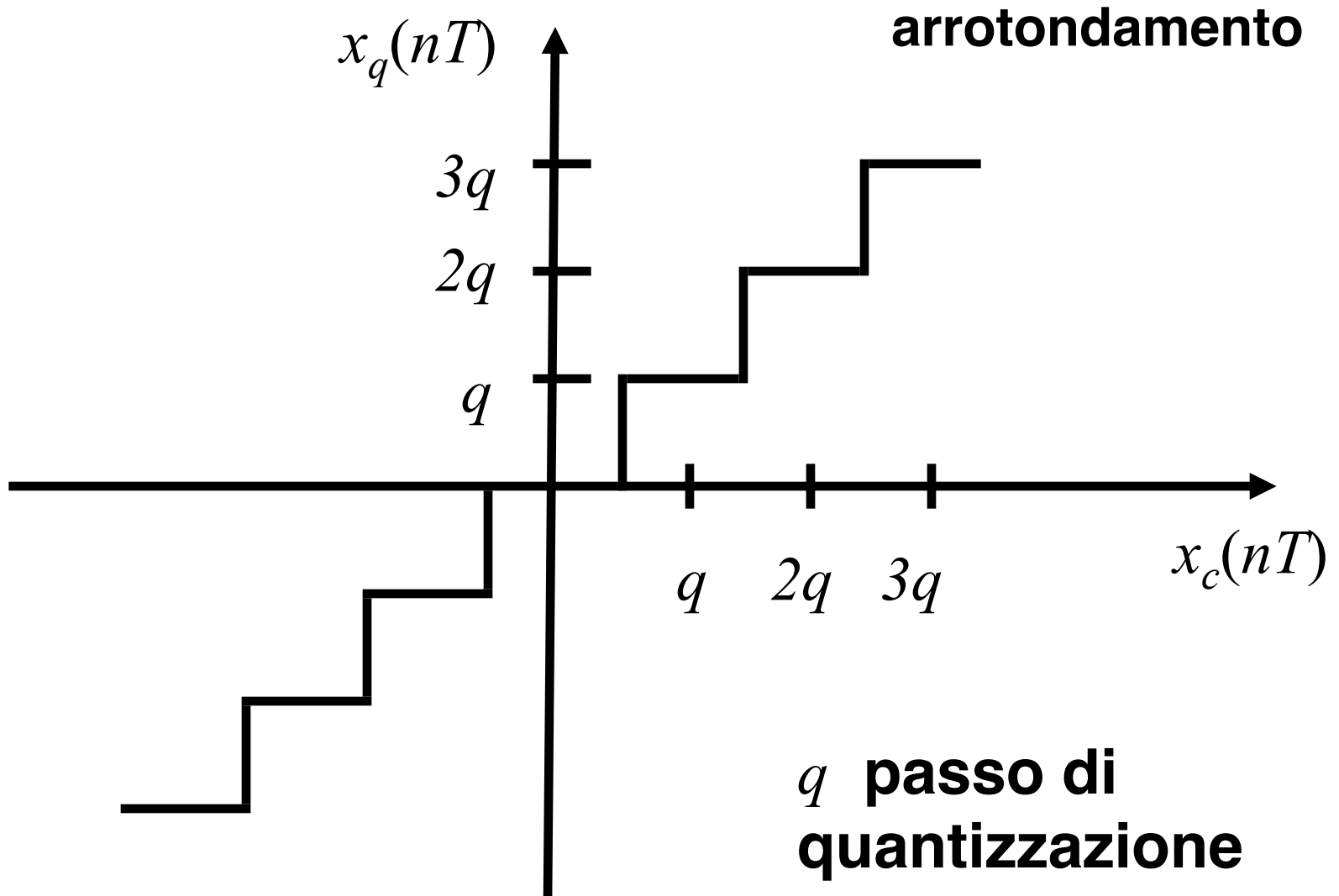
**Campionamento**

**Quantizzazione**

# QUANTIZZAZIONE



# Quantizzazione uniforme





## **Errore di quantizzazione**

$$e(nT) = xq(nT) - xc(nT)$$

**ovvero**

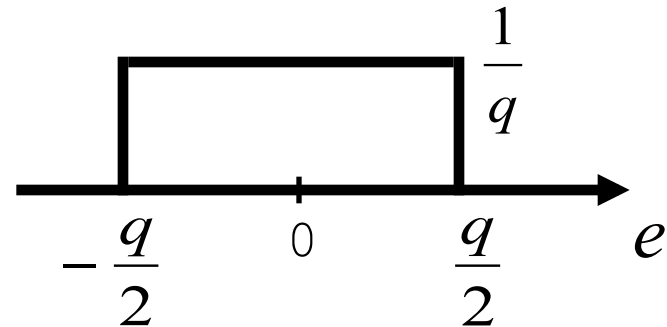
$$xq(nT) = xc(nT) + e(nT)$$

$$\left| e(nT) \right| \leq \frac{q}{2} \quad \text{arrotondamento}$$

# Modello dell'errore di quantizzazione ( comunemente assunto)

$e(nT)$  :    ◆ segnale aleatorio  
                 ◆ indipendente da  $x_c(nT)$

◆ densità di probabilità  
uniformemente distribuita:  
(arrotondamento)



◆ bianco

➤ **valor medio:**             $0$     *arrotondamento*  
                                   $[q/2$     *troncamento* ]

➤ **varianza:**             $\sigma_e^2 = \int_{-\frac{q}{2}}^{\frac{q}{2}} e^2 \frac{1}{q} de = \frac{q^2}{12}$

## Potenza dell'errore di quantizzazione:

$$N_q = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} G_e(F) dF = \frac{q^2}{12}$$

## Densità spettrale di potenza:

$$G_e(f) = \frac{q^2}{12} T \quad \text{ovvero} \quad G_e(F) = \frac{q^2}{12}$$

# Valutazione critica del modello

## ● Contro esempi banali di non validità del modello

- Es.:**
- **segnale costante**
  - **sinusoide con frequenza sottomultipla della frequenza di campionamento**
  - **onda quadra**
  - **molti segnali deterministici**
  - **ecc....**

- **Si può supporre valido se il segnale è sufficientemente “complicato”: per esempio se da campione a campione attraversa diversi livelli di quantizzazione ed in modo “apparentemente” non deterministico**
- **Modello adeguato nella maggior parte dei segnali di interesse**
- **Modello realistico e matematicamente trattabile**

# Rapporto segnale - rumore di quantizzazione

**$B$  bit (compreso il segno):  $2^B$  livelli**

***Dinamica quantizzatore***  $2(\pm 1) \Rightarrow q = \frac{2}{2^B}$   
(in uscita)

$$SNR_q = \frac{S}{N_q} = \frac{\text{Potenza del segnale}}{\text{Potenza err. di quantizzazione}} =$$
$$= \frac{S}{q^2 / 12} = 3S2^{2B}$$

$$(SNR_q)_{dB} = 6.02B + 4.77 + S_{dB} \quad (dB)$$

➤ **Ogni bit aggiunto fa aumentare  $SNR_q$  di 6.02 dB**

# Esempi particolari

- Segnale sinusoidale (*val. max = 1, S=1/2*)

$$(SNR_q)_{dB} = 6.02B + 1.76 \quad (\text{dB})$$

- Segnale gaussiano

**Semi-Dinamica quantizzatore:**  $1 = 4\sigma = 4\sqrt{S}$

$$\left[ \text{Prob} \left\{ |x_c(nT)| > 4\sigma \right\} \cong 6.3 \cdot 10^{-5} \right]$$

$$S = \frac{1}{16}$$

$$(SNR_q)_{dB} = 6.02B - 7.27 \quad (\text{dB})$$

**Esempi numerici:**      $SNR_q(dB)$

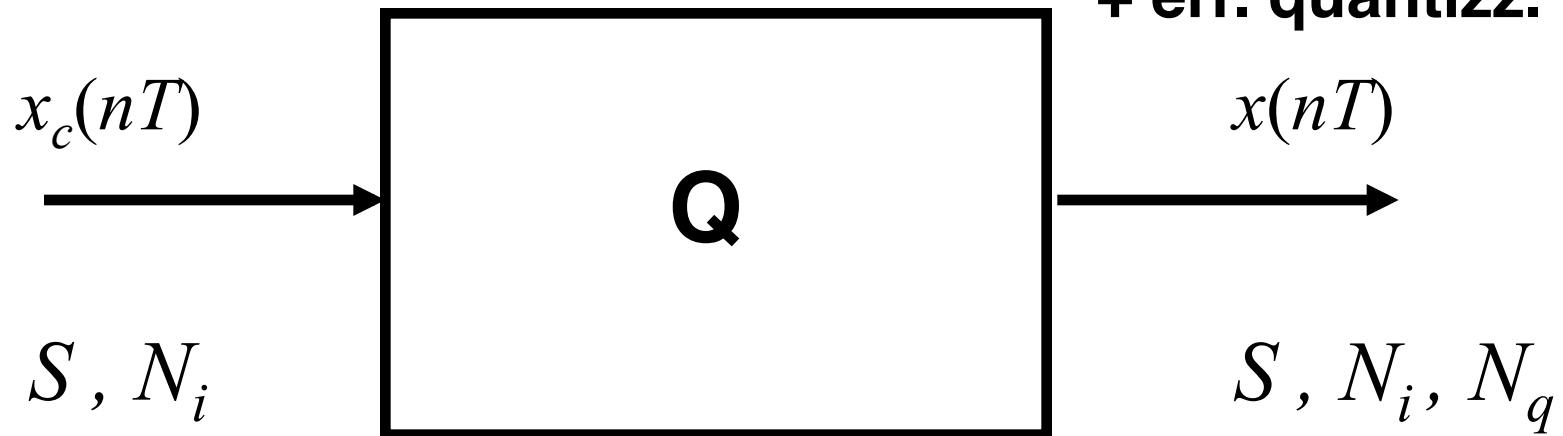
B	sinusoide	gaussiano
2	13.8	4.77
4	25.8	16.8
6	37.9	28.9
8	49.9	40.9
10	62.0	52.9
12	74.0	65.0
14	86.0	77.0
16	98.0	89.0



# Degradazione del rapporto segnale/rumore

segnale  
+ rumore

segnale  
+ rumore  
+ err. quantizz.



$$SNR_i = \frac{S}{N_i} \quad SNR_{uq} = \frac{S}{(N_i + N_q)}$$

**Ipotesi: rumore ed errore di quantizzazione incorrelati**

$$\frac{1}{SNR_{uq}} = \frac{1}{SNR_i} + \frac{1}{SNR_q}$$

**degradazione**

$$\Delta_{dB} = (SNR_i)_{dB} - (SNR_{uq})_{dB}$$

● **Dati  $SNR_i$  e  $B$ , si determina  $\Delta_{dB}$**

● **Dati  $SNR_i$  e  $\Delta_{dB}$  si determina  $SNR_q$  e quindi  $B$ .**

# CONVERSIONE A/D DI SEGNALI PASSA-BANDA

## 1. Campionamento diretto

Se la banda del segnale  $x_a(t)$  è compresa fra

$$k f_x \leq |f| \leq (k+1) f_x \quad k \text{ intero}$$

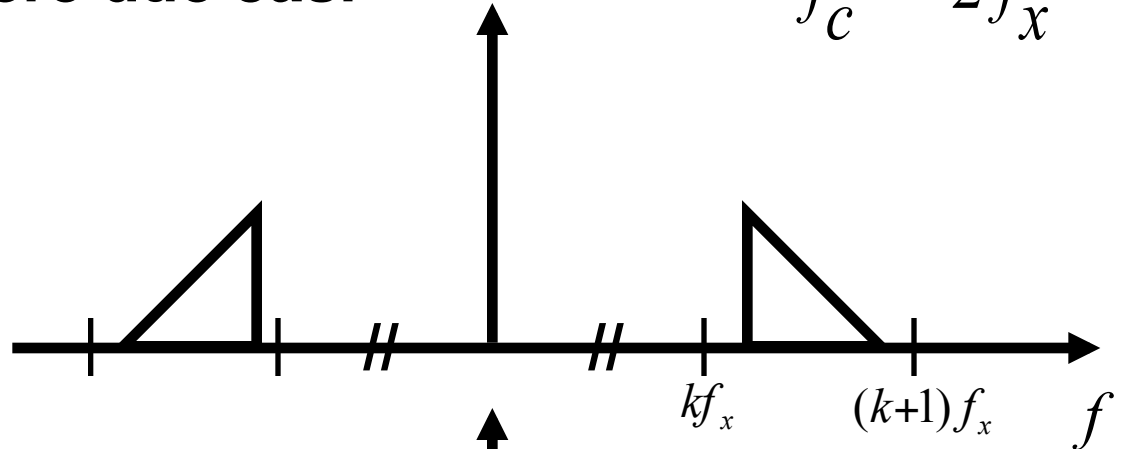
si ha assenza di sovrapposizione spettrale delle repliche (assenza di distorsione spettrale) se si campiona il segnale alla frequenza:

$$f_c = 2 f_x$$

**Possiamo distinguere due casi**

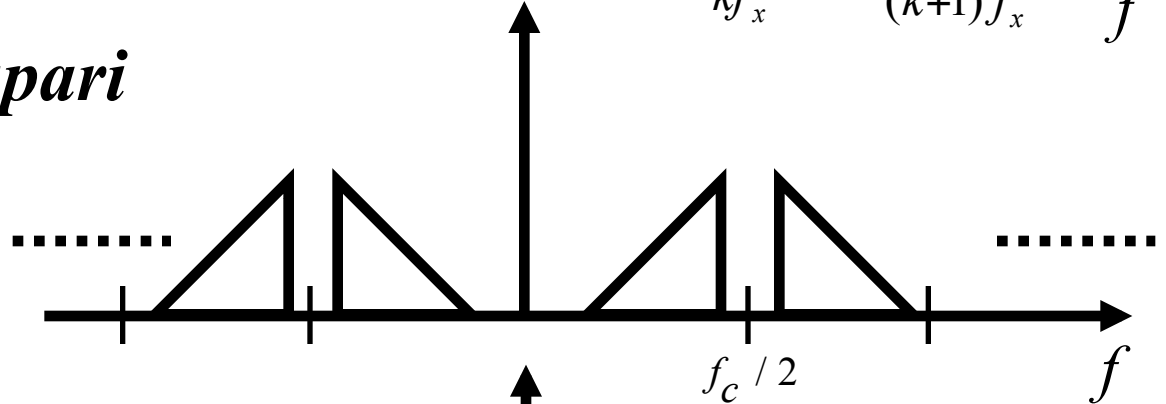
$$f_c = 2f_x$$

$x_a(t)$



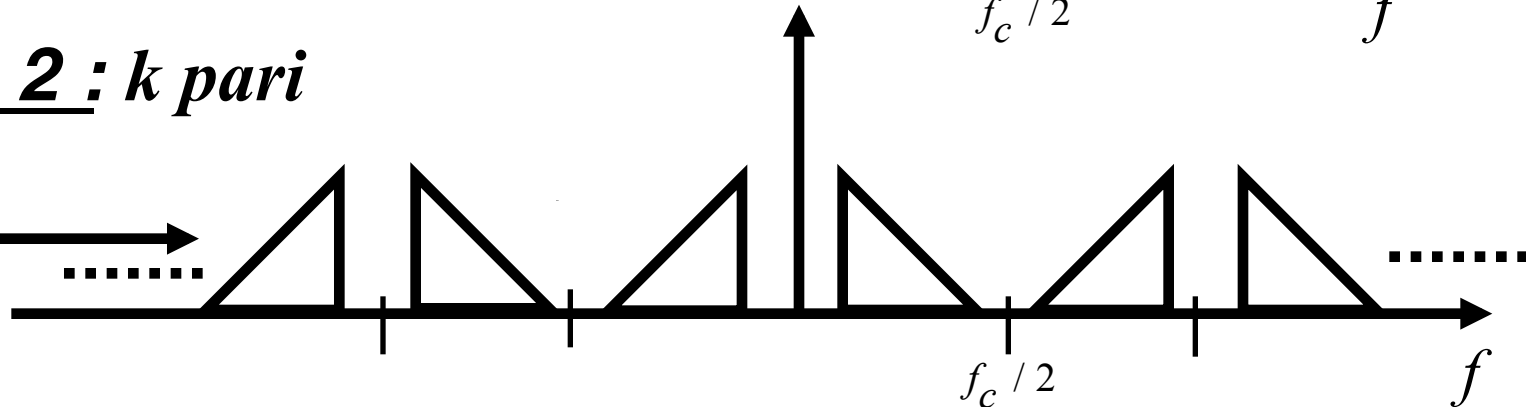
**Caso 1 :  $k$  dispari**

$x_c(nT)$

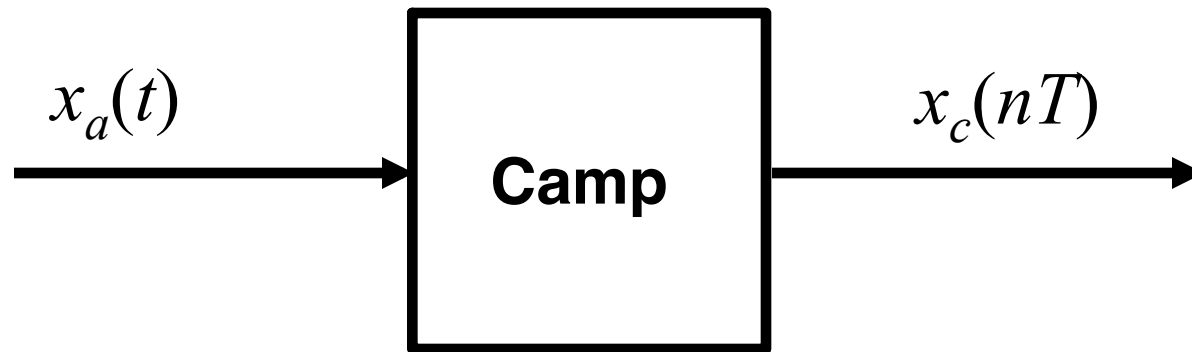


**Caso 2 :  $k$  pari**

$x_c(nT)$



**Per questi tipi di segnali si può convertire alla frequenza  $f_c = 2f_x$ , senza distorsione**



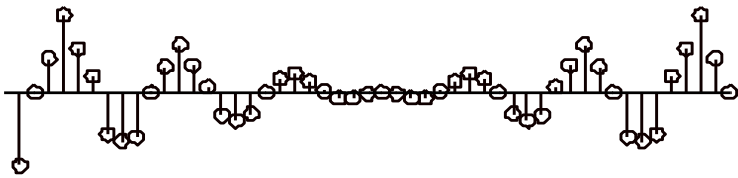
$$T = 1/f_c$$

**➔  $f_x$  da scegliere in modo che la banda del segnale sia compresa fra due suoi multipli interi consecutivi (*soluzione non univoca*)**

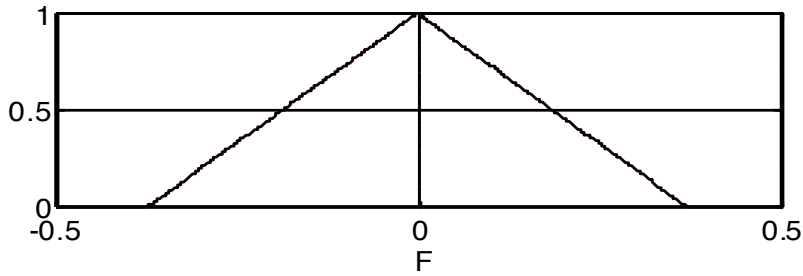
## ***Osservazione***

- ★ **Nel caso 1 ( $k$  dispari) la replica dello spettro nella banda utile è invertita rispetto a quella nella banda originaria**
- ★ **Nel caso 2 ( $k$  pari) la replica dello spettro nella banda utile non è invertita rispetto a quella nella banda originaria**
- **Se l'inversione spettrale è un problema.....**

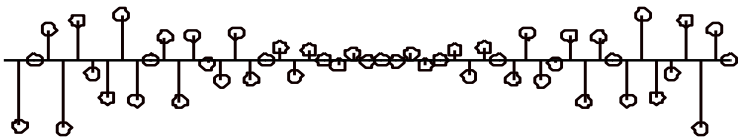
Segnale



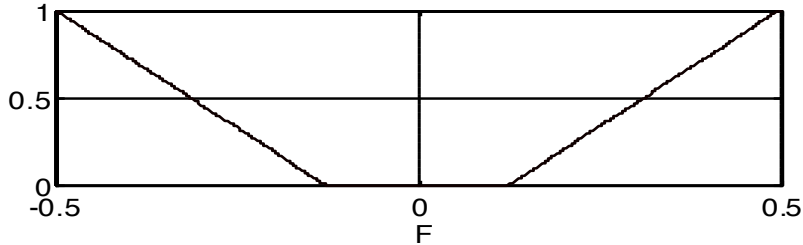
Spettro di ampiezza



Segnale



Spettro di ampiezza (inversione)



## Inversione spettrale per segnali numerici.

$x(n)$

Si invertono di segno i campioni dispari del segnale originale.

Il relativo spettro risulta invertito.

$$x'(n) = (-1)^n x(n)$$

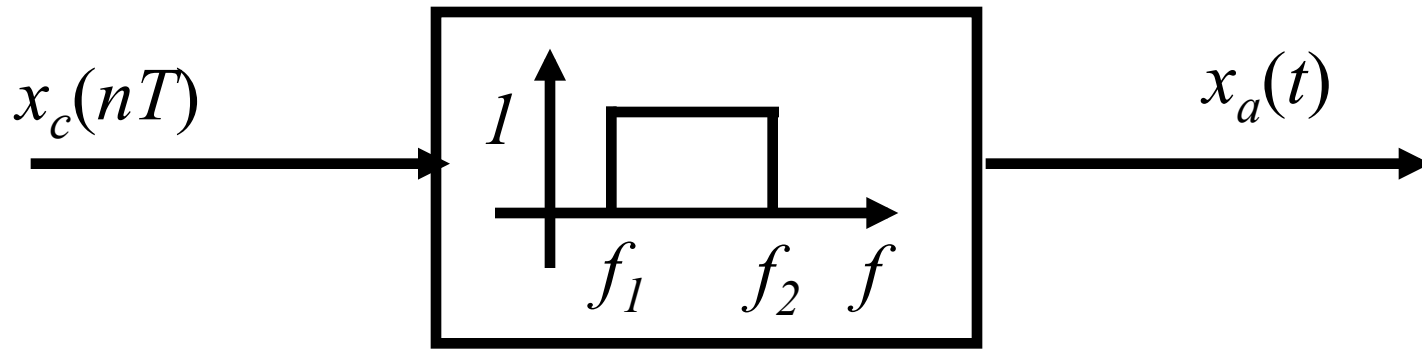
## Formula di ricostruzione

$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT) \frac{\text{sen } \pi f_c (t-nT)/2}{\pi f_c (t-nT)/2} \cos 2\pi f_0 (t-nT)$$

$$f_0 = \frac{2k+1}{2} \frac{f_c}{2} \quad \text{frequenza di centro banda}$$



**Ovvero:**

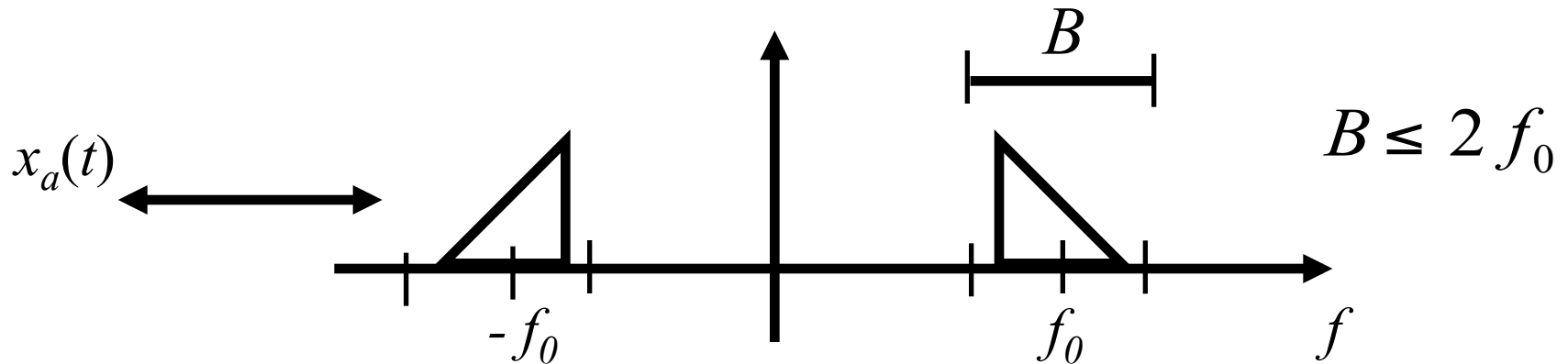


**filtro passa-banda ideale**  
(analogico)

$$f_1 = k \frac{f_c}{2}$$

$$f_2 = (k + 1) \frac{f_c}{2}$$

## 2. Campionamento delle componenti I e Q



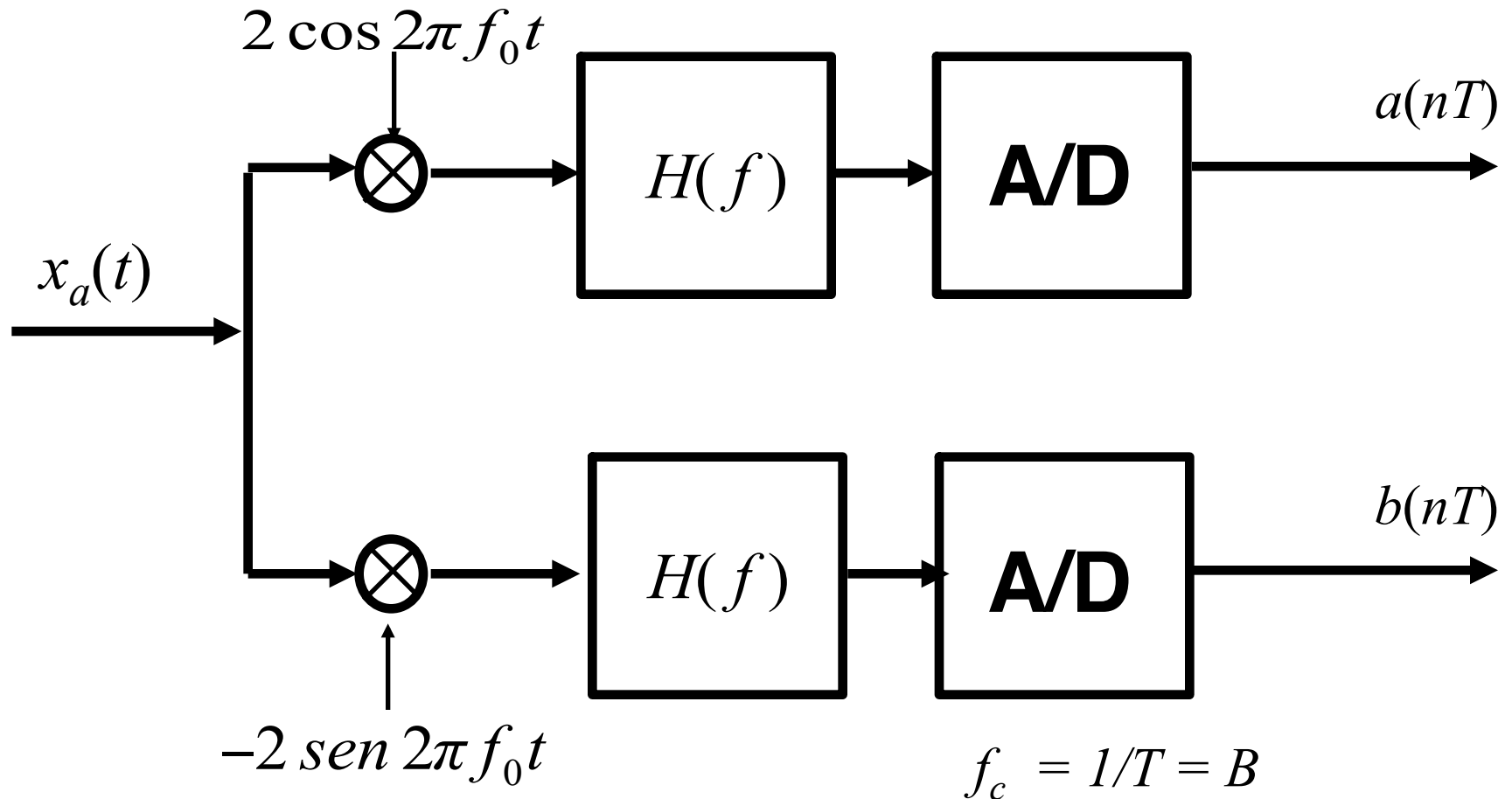
$$x_a(t) = a(t) \cos 2\pi f_0 t - b(t) \sin 2\pi f_0 t$$

$a(t)$  **componente I** (in fase)

$b(t)$  **componente Q** (in quadratura)

$$\left. \begin{array}{l} a(t) \Leftrightarrow A(f) \\ b(t) \Leftrightarrow B(f) \end{array} \right\} = 0, \text{ per } |f| \geq \frac{B}{2}$$

## A. Metodo tradizionale

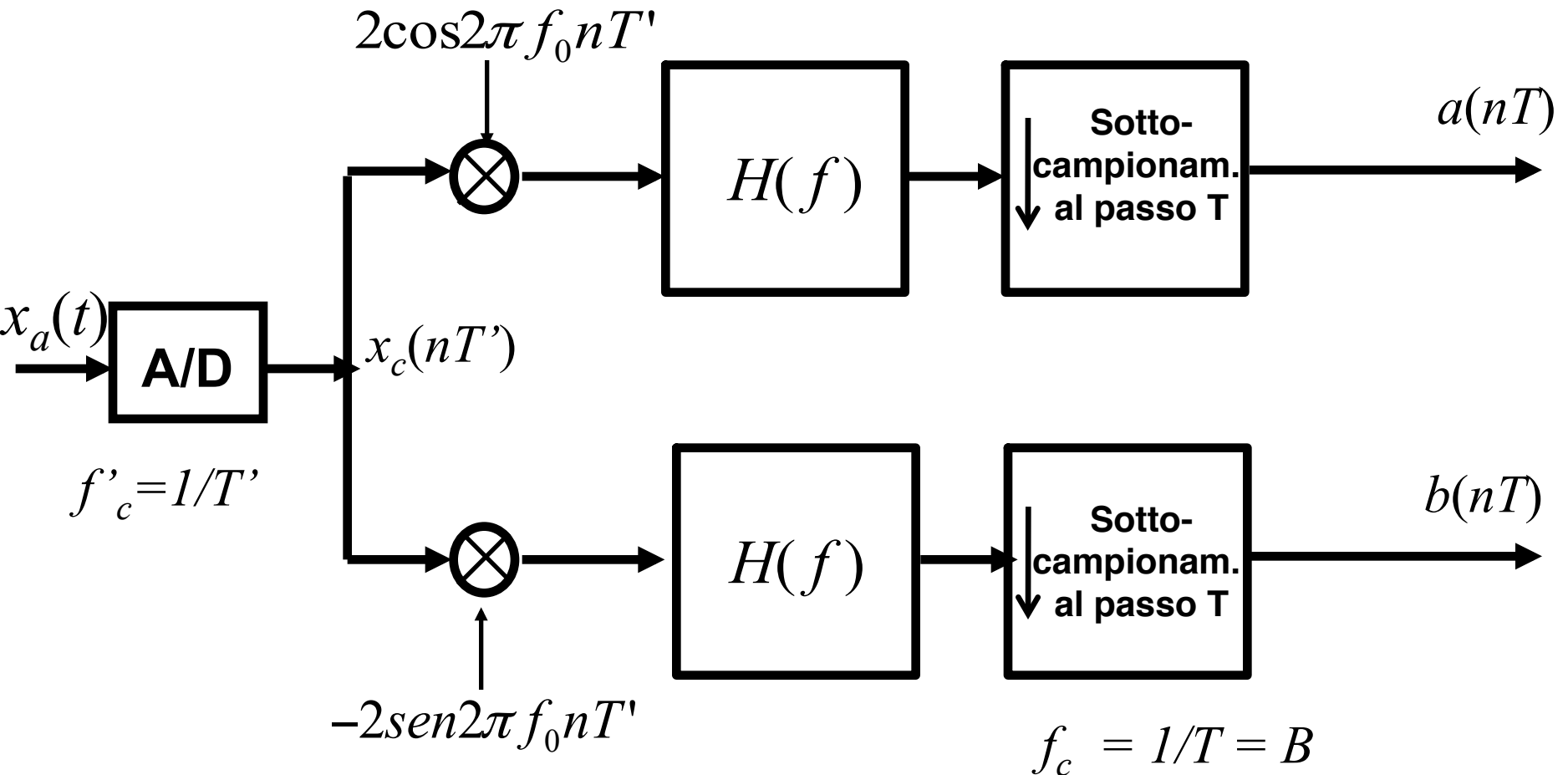


$H(f)$  **filtro passa-basso per**  $|f| \leq \frac{B}{2}$

# Problemi:

- **moltiplicatori identici (analogici)**
- **sinusoidi esattamente sfasate di  $90^\circ$**   
(generate analogicamente)
- **filtri (analogici) identici nei due rami**
- **due A/D sincroni**

## B. Metodo numerico



$H(f)$  filtro *numerico* passa-basso per  $|f| \leq \frac{B}{2}$

## **Vantaggi:**

- **un solo A/D (anche se più veloce)**
- **sinusoidi (numeriche) esattamente sfasate di  $90^\circ$**
- **filtri identici (numerici)**

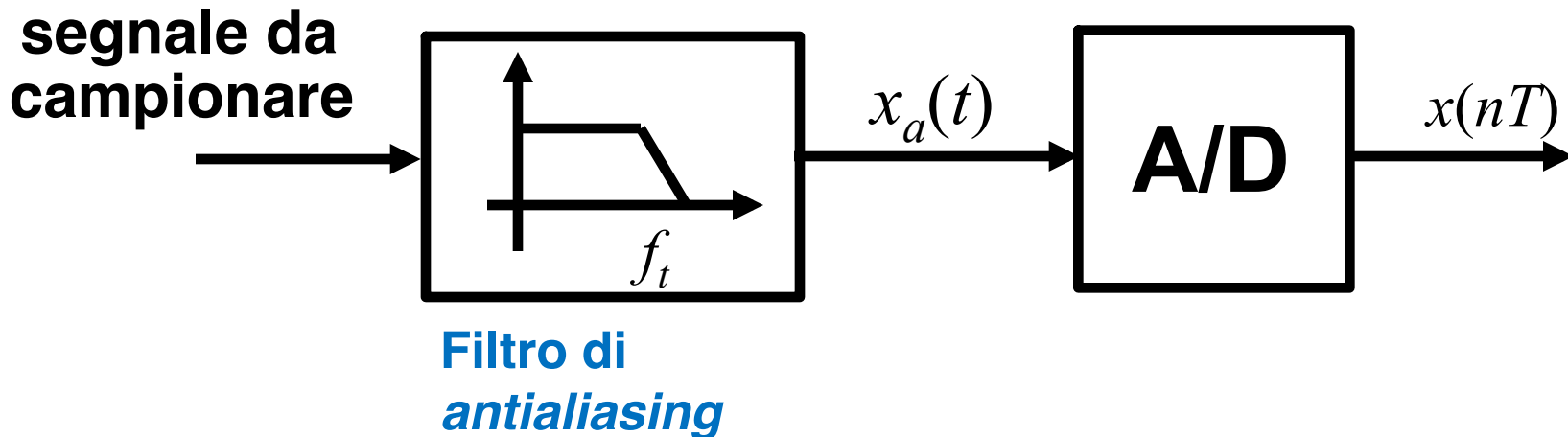
# CONVERSIONE A/D CON CAMPIONAMENTO REALE

[\[Cap. 1.4\]](#)

**Due contributi:**

- 1. *Aliasing* o ripiegamento dello spettro**
- 2. Tempo non istantaneo di campionamento  
(*aperture time del S/H*)**

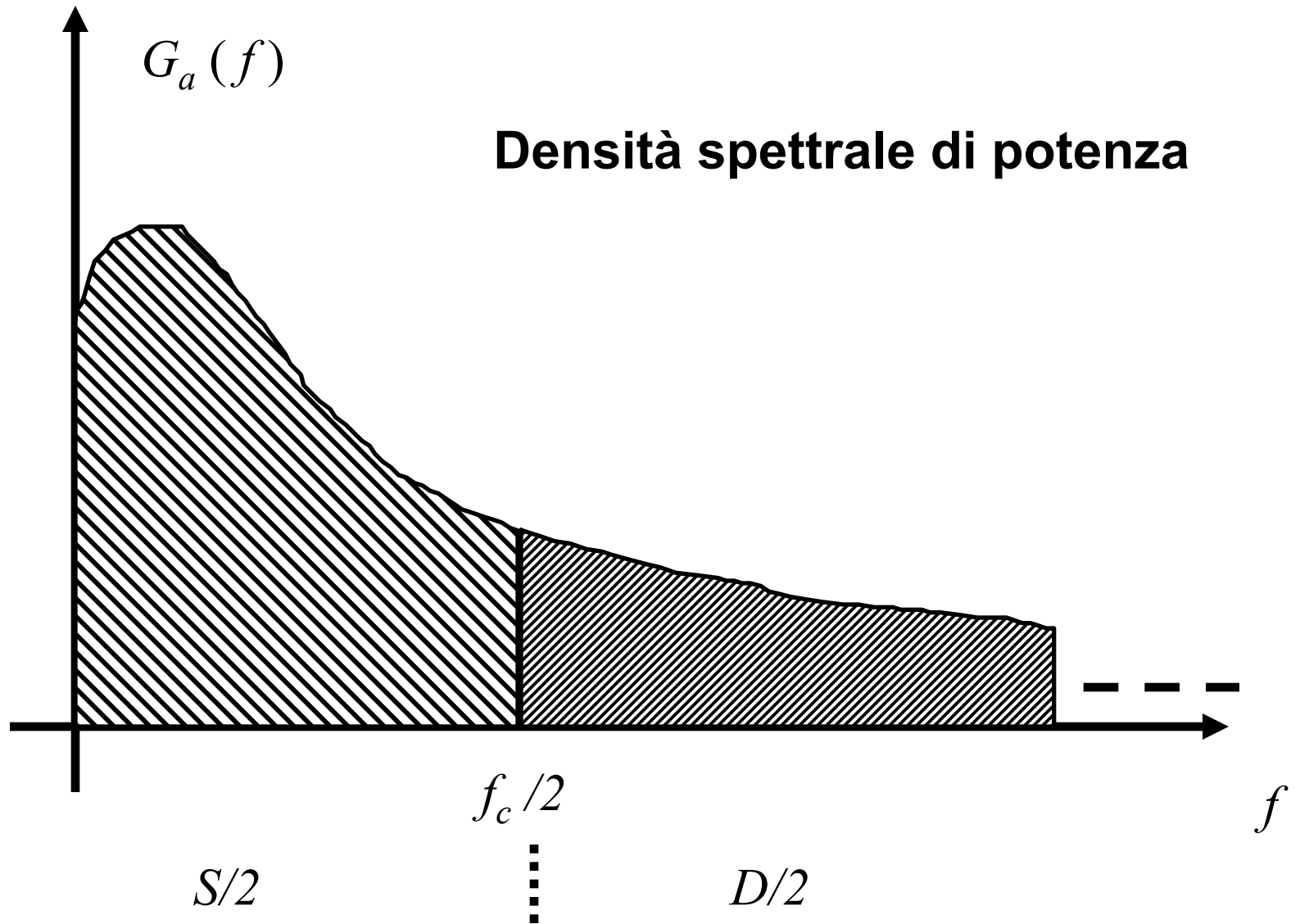
# 1. Ripiegamento dello Spettro e Filtro di *antialiasing*



**Il filtro di *antialiasing* limita la banda del segnale in modo da ridurre la distorsione spettrale**

**Filtro di *antialiasing* = passa basso non ideale**





# Distorsione spettrale introdotta dal campionamento

In generale

$$D_c(f) = \frac{1}{T} \sum_{k \neq 0} G_a(f - k f_c) \quad |f| < \frac{f_c}{2}$$

**Se verificate le condizioni **1)** e **2)** di assenza di sovrapposizione spettrale  $D_c(f) = 0$**

**Altrimenti  $D_c(f) \neq 0$**

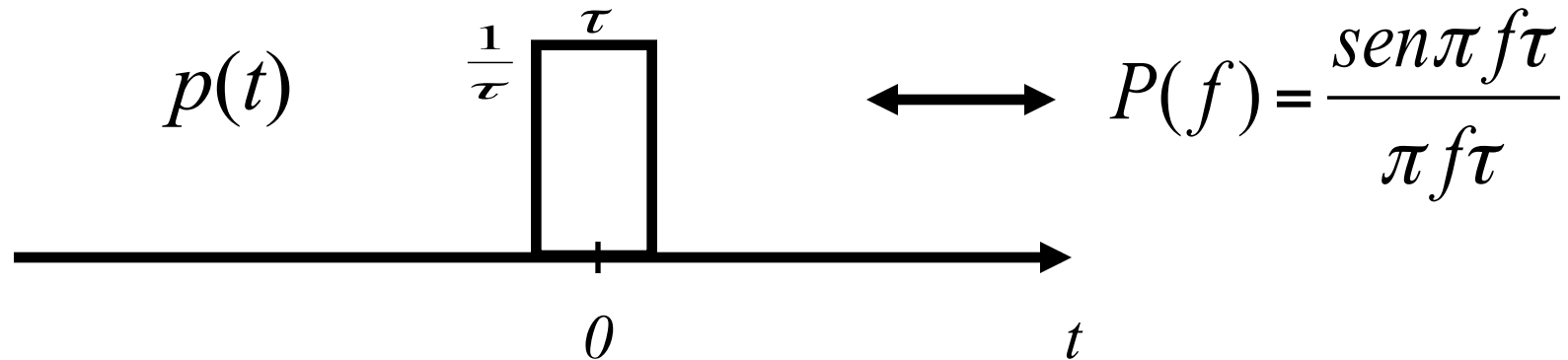
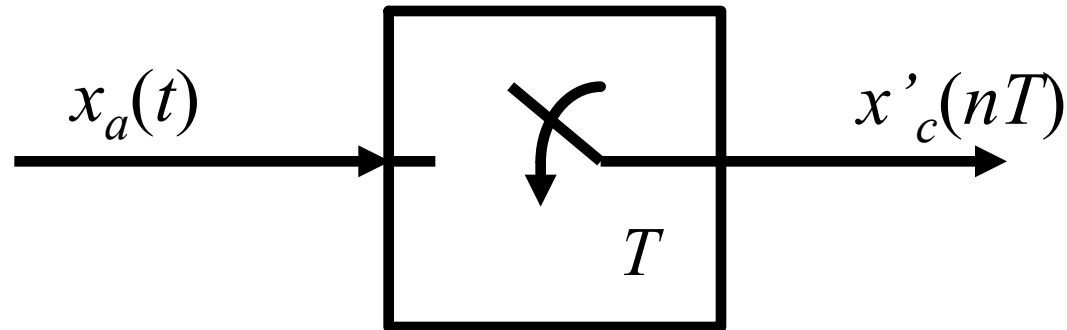
**Si può definire un rapporto segnale/  
distorsione di campionamento:**

$$\frac{S}{D} = \frac{\text{Potenza del segnale utile}}{\text{Potenza della distorsione}}$$

$$S = \frac{2}{T} \int_0^{f_c/2} G_a(f) df$$

$$D = 2 \int_0^{f_c/2} D_c(f) df = \frac{2}{T} \int_{f_c/2}^{\infty} G_a(f) df$$

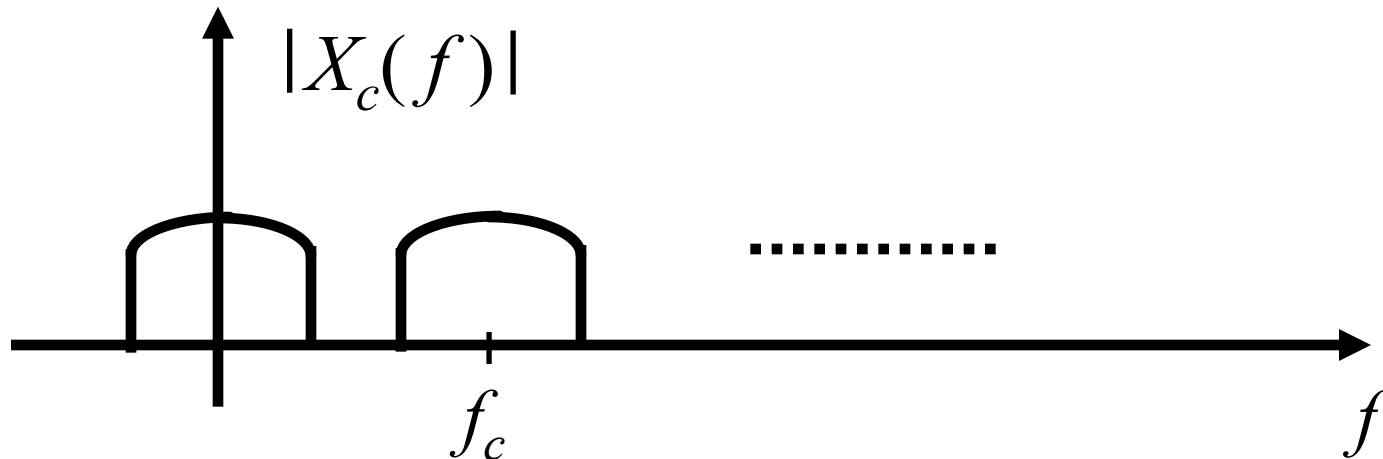
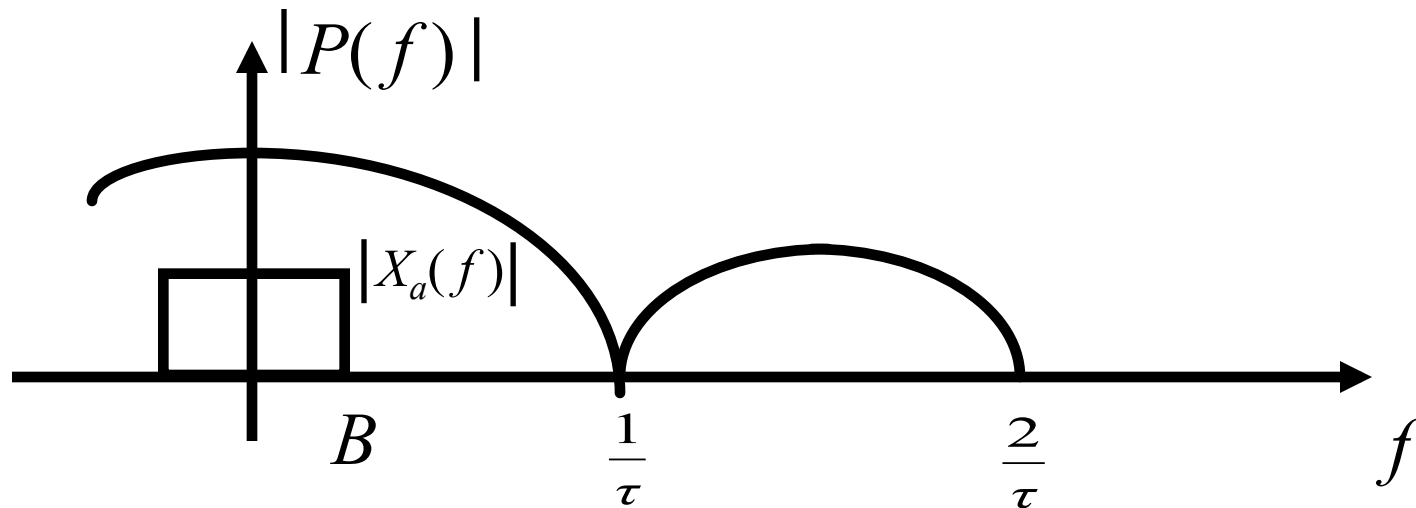
## 2. Tempo di campionamento non istantaneo



$$x'_c(nT) = \frac{1}{\tau} \int_{nT-\tau/2}^{nT+\tau/2} x_a(t) dt \quad \text{invece di } x_c(nT)$$

$$= [x_a(t) * p(t)]_{t=nT}$$

**Si campiona un segnale con spettro  $X_a(f) P(f)$   
[invece di  $X_a(f)$ ]**



# Conclusione

**Il campionamento di un segnale mediante un impulso di durata non nulla può essere trattato come il campionamento ideale del segnale filtrato dallo spettro dell'impulso di campionamento.**

**→ Conclusione valida per qualsiasi  $P(f)$**

**→ Se  $\tau \ll T$  effetti trascurabili**

**Altrimenti se ne deve tenere conto**

**Nel caso di impulso rettangolare lo spettro del segnale campionato viene distorto da una funzione**

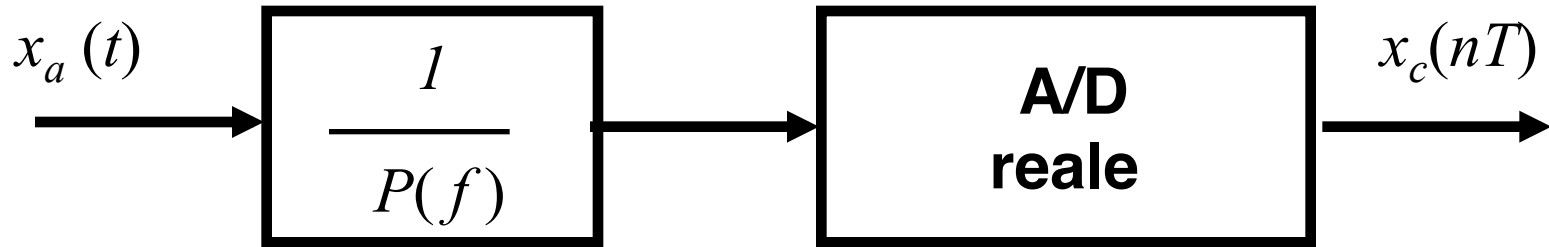
$$P(f) = \frac{\text{sen} \pi f \tau}{\pi f \tau}$$

**spesso trascurabile se  $\tau$  è piccolo.**

**Altrimenti si compensa la distorsione con un filtro con risposta nella banda utile del segnale del tipo**

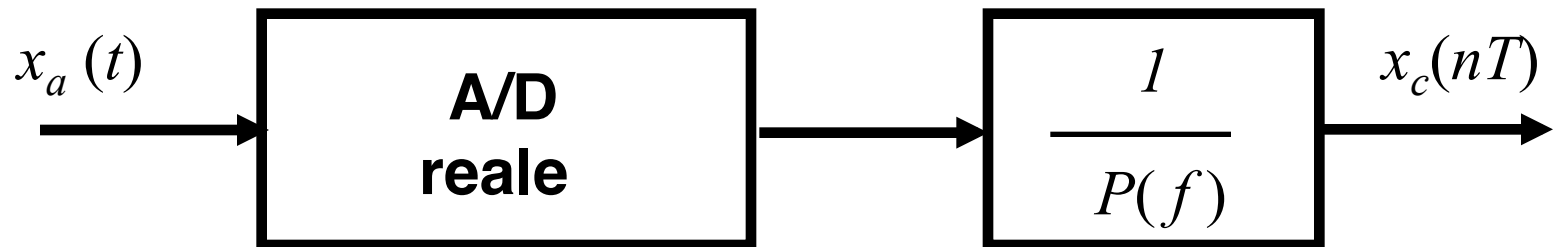
$$\frac{1}{P(f)} = \frac{\pi f \tau}{\text{sen} \pi f \tau} , \quad |f| \leq B$$

## a) prima del campionamento (compensazione analogica)



**Filtro analogico**  
(può essere incluso  
nel filtro di antialiasing)

## b) dopo il campionamento (compensazione digitale)

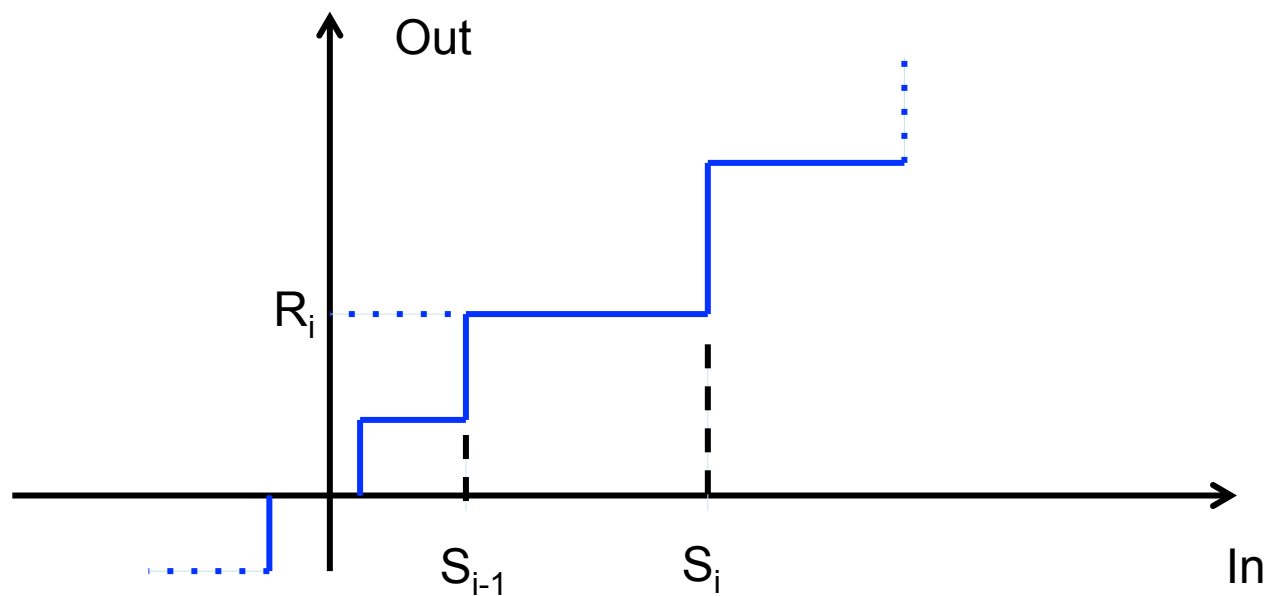


**Filtro numerico**  
(è sufficiente nella banda  
del segnale di ingresso)



# Quantizzatori non uniformi

Progetto ottimo (Lloyd-Max)



# Quantizzatori non uniformi

Progetto ottimo (Lloyd-Max)

$P_q = E[(x - x_q)^2]$  deve essere minimo

$$P_q = \sum_{i=1}^N \int_{s_{i-1}}^{s_i} (x - R_i)^2 f_X(x) dx$$

$$\frac{dP_q}{dS_i} = \frac{d}{dS_i} \left[ \int_{s_{i-1}}^{s_i} (x - R_i)^2 f_X(x) dx + \int_{s_i}^{s_{i+1}} (x - R_{i+1})^2 f_X(x) dx \right] =$$

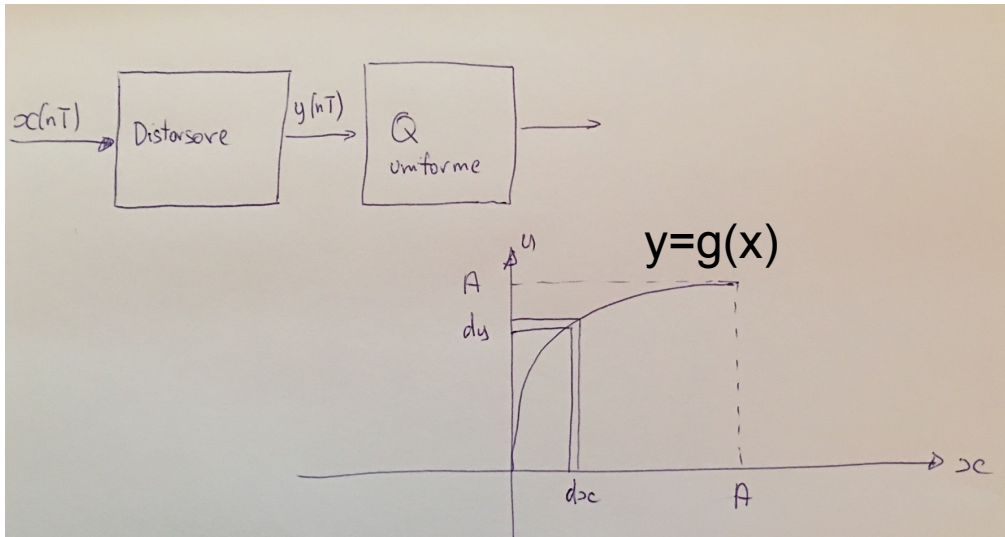
$$= (S_i - R_i)^2 f_X(S_i) - (S_i - R_{i+1})^2 = 0$$

$$\Rightarrow S_i = \frac{R_i + R_{i+1}}{2}$$

$$\frac{dP_q}{dR_i} = \frac{d}{dR_i} \int_{s_{i-1}}^{s_i} (x - R_i)^2 f_X(x) dx = -2 \int_{s_{i-1}}^{s_i} (x - R_i) f_X(x) dx = 0$$

$$\Rightarrow R_i = \frac{\int_{s_{i-1}}^{s_i} x f_X(x) dx}{\int_{s_{i-1}}^{s_i} f_X(x) dx}$$

# Quantizzatori non uniformi



$$f_Y(y)dy = f_X(x)dx$$
$$f_Y(y) = f_X(x) \frac{dx}{dy} = f_X(x) \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = f_X(x) \frac{1}{g'(x)}$$
$$cost = f_X(x) \frac{1}{g'(x)} \rightarrow g'(x) = \alpha f_X(x) \rightarrow g(x) \sim F_X(x)$$

# Componding (Compression-Expanding)

