```
        t1 = t1/factorial(m);
    % trasformata Z inversa causale
        if P(i) < R1 - EPS & P(i) < R2 - EPS
            x = x + R(i)*t1.*(P(i).^t).*un;
    % trasformata Z inversa anticausale
        elseif P(i) > R1 + EPS & P(i) > R2 + EPS
            x = x - R(i)*t1.*(P(i).^t).*u_n;
    % oppure polo interno alla ROC
        else
            disp('Errore: polo interno alla ROC');
            return;
        end
end
```

Ovviamente, la funzione realizzata è utilizzabile anche per funzioni razionali con solo poli semplici.

Si osservi che in questo esempio è stato considerato il fatto che i poli, calcolati numericamente, possano risultare approssimati e quindi il controllo sull'uguaglianza di poli consecutivi nel vettore `P` viene effettuato mediante la verifica della condizione `abs(P(i)-P(i-1)) < EPS`. Di tale fatto viene tenuto conto anche nel controllo della posizione del polo relativamente alla regione di convergenza.

Anche in questo caso, è possibile verificare la correttezza della `function` realizzata confrontando la sequenza di uscita con la trasformata Z inversa ricavata analiticamente nell'esercizio 2.11 per $ROC_X = \{z : |z| > 1\}$. Si consideri un intervallo temporale corrispondente ai primi 40 campioni con indice positivo. Il confronto si ottiene eseguendo i seguenti comandi:

```
>> N = 1; D = [1 -1 -1 1]; t = 0:39; R1 = 1; R2 = Inf;
>> x = antiTrasfZ2(N,D,R1,R2,t);
>> y = 1/4*(-1).^t + 1/4 + 1/2*(t+1);
>> max(abs(x-y))

ans =
   2.9207e-006
```

2.8 Problemi

P-2.1 Si dimostri che la convoluzione discreta di due sequenze causali, aventi cioè campioni nulli per $n < 0$, è ancora una sequenza causale.

P-2.2 Calcolare la trasformata Z e la regione di convergenza associata alle seguenti sequenze:

a) $x[n] = \left[(\frac{1}{2})^n + 2^n\right] u[n]$;
b) $y[n] = (-1)^n x[n]$;
c) $x[n] = (-1)^n (\frac{1}{2})^n u[n]$;
d) $x[n] = n a^n \sin(\omega_0 n) u[n]$;
e) $x[n] = n^2 (\frac{1}{4})^n u[n]$;
f) $x[n] = a^n (u[n] - u[n-N])$;
g) $x[n] = \begin{cases} (\frac{1}{4})^n & n \geq 0 \\ 3^n & n < 0 \end{cases}$;
h) $x[n] = u[-n]$;
i) $x[n] = (-1)^n (\frac{1}{4})^{n-4} u[-n]$;
j) $x[n] = (-1)^n u[-n]$.

P-2.3 Date le seguen[...] sa, considerando tutte [...] assenza di singolarità [...]

a) $X(z) = \frac{1}{z^2 - \frac{3}{2}z + \frac{1}{2}}$
b) $X(z) = \frac{1}{z^2 - \frac{10}{3}z + 1}$
c) $X(z) = \frac{z+3}{z^2 - 3z + 2}$;
d) $X(z) = \frac{z+2}{z^2 - 2z + 1}$;
e) $X(z) = \frac{1}{z^2 - \frac{1}{4}z + \frac{1}{2}}$

P-2.4 Usando il te[...] seguenti sequenze $y[$[...]

a) $y[n] = u[n] * u[n$[...]
b) $y[n] = (u[n] - u[$[...]
c) $y[n] = (u[n] - u[$[...]
d) $y[n] = (a^n u[n])$[...]

Si calcoli la trasform[...] quenze coincidono c[...] discreta (nel dominio [...]

P-2.5 Usando le pro[...]

a) $y[n] = (\frac{1}{2})^n u[n]$[...]
b) $y[n] = \cos(\omega_0 n)$[...]

P-2.6 Usando la s[...] trasformata Z descrit[...]

P-2.7 Dati i seguen[...] $X(z)|_{z=1} = 1$:

a) poli = $\{-0.8\}$; z[...]
b) poli = $\{-0.5, 2\}$;[...]
c) poli = $\{0.25, \pm 0.$[...]
d) poli = $\{1, 1\}$; ze[...]
e) poli = $\{0.5, 0.5,$[...]

P-2.8 Sia data una [...]

Determinare $Y(z)$ i[...]

P-2.9 Una sequen[...] caratterizzata dalla [...] centro di simmetria. [...] anche $1/z_0$ e $1/p_0$ s[...]

P-2.10 Usando il t[...] aventi la seguente tr[...]

P-2.3 Date le seguenti funzioni razionali in z, determinare la loro trasformata Z inversa, considerando tutte le possibili regioni di convergenza ammissibili con il vincolo di assenza di singolarità all'interno:

a) $X(z) = \frac{1}{z^2 - \frac{3}{2}z + \frac{1}{2}}$;
b) $X(z) = \frac{1}{z^2 - \frac{10}{3}z + 1}$;
c) $X(z) = \frac{z+3}{z^2 - 3z + 2}$;
d) $X(z) = \frac{z+2}{z^2 - 2z + 1}$;
e) $X(z) = \frac{1}{z^2 - \frac{1}{4}z + \frac{1}{2}}$;
f) $X(z) = \frac{z+1}{(z-1)^2}$;
g) $X(z) = \frac{15z^2 + 15z}{3z^2 + 7z + 2}$;
h) $X(z) = \frac{z^3 - z^2 - \frac{1}{3}z - \frac{1}{27}}{z^2 - \frac{1}{5}z - \frac{1}{6}}$;
i) $X(z) = \frac{z^3 + 3z^2 + \frac{11}{6}z + \frac{1}{3}}{z^2 + \frac{4}{3}z + \frac{1}{3}}$.

P-2.4 Usando il teorema della convoluzione discreta, ricavare la trasformata Z delle seguenti sequenze $y[n]$:

a) $y[n] = u[n] * u[n]$;
b) $y[n] = (u[n] - u[n-10]) * (u[n] - u[n-10])$;
c) $y[n] = (u[n] - u[n-10]) * (u[n] - u[n-30])$;
d) $y[n] = (a^n\, u[n]) * (u[n] - u[n-10])$.

Si calcoli la trasformata Z inversa delle funzioni $Y(z)$ trovate e si verifichi che tali sequenze coincidono con quelle che si ottengono applicando direttamente la convoluzione discreta (nel dominio del tempo) alle sequenze di partenza.

P-2.5 Usando le proprietà della trasformata Z, determinare le seguenti sequenze $y[n]$:

a) $y[n] = (\frac{1}{2})^n u[n] * u[n]$;
b) $y[n] = \cos(\omega_0 n) u[n] * u[n]$.

P-2.6 Usando la sequenza $x[n] = [(\frac{1}{2})^n + j(\frac{1}{2})^n]\, u[n]$, verificare le proprietà della trasformata Z descritte nell'esercizio 2.2-c).

P-2.7 Dati i seguenti insiemi di poli e zeri, determinare la trasformata $X(z)$ tale che $X(z)|_{z=1} = 1$:

a) poli = $\{-0.8\}$; zeri= $\{1.5 \cdot e^{\pm j\frac{\pi}{6}}\}$;
b) poli = $\{-0.5, 2\}$; zeri = $\{1, 0.5\}$;
c) poli = $\{0.25, \pm 0.5\}$; zeri = $\{2, 4\}$;
d) poli = $\{1, 1\}$; zeri = $\{0.5\}$;
e) poli = $\{0.5, 0.5, 2, 2\}$; zeri = $\{1\}$;
f) poli = $\{-1, -1, 1, 1\}$; zeri = $\{1, 1.5, 2\}$;
g) poli = $\{1.5 \cdot e^{\pm j\frac{\pi}{6}}\}$; zeri = $\{1\}$;
h) poli = $\{0.5 \cdot e^{\pm j\frac{\pi}{4}}\}$; zeri = $\{1.5\}$;
i) poli = $\{2 \cdot e^{\pm j\frac{\pi}{12}}\}$; zeri = $\{4\}$.

P-2.8 Sia data una sequenza $x[n]$ e sia $X(z)$ la sua trasformata Z. Sia $y[n]$ definita da

$$y[n] = \begin{cases} x[n] & \text{se n è pari} \\ 0 & \text{se n è dispari.} \end{cases}$$

Determinare $Y(z)$ in funzione di $X(z)$.

P-2.9 Una sequenza con campioni simmetrici rispetto ad un certo asse di simmetria è caratterizzata dalla proprietà $x(n) = x(N - 1 - n)$, dove N è un intero e $(N-1)/2$ il centro di simmetria. Dimostrare che se z_0 e p_0 sono uno zero e un polo di $X(z)$, allora anche $1/z_0$ e $1/p_0$ sono, rispettivamente, uno zero e un polo di $X(z)$.

P-2.10 Usando il teorema di Parseval nel dominio z, si calcoli l'energia delle sequenze aventi la seguente trasformata Z:

a) $X(z) = \frac{z^2}{(z-a)(z-b)}$, $ROC_X = \{z : |z| > \max(|a|, |b|)\}$;
b) $X(z) = \frac{z^2}{z^2 - 2r\cos\theta z + r^2}$, $ROC_X = \{z : |z| > r\}$.

Si verifichi il risultato trovato calcolando l'energia nel dominio del tempo.

P-2.11 Data una sequenza $x[n]$, periodica di periodo N, tale che

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p[n + kN],$$

dove $p[n]$ è una sequenza finita di durata N, determinare $X(z)$ in funzione di $P(z)$.

P-2.12 Siano date due sequenze $x[n]$ e $w[n]$, non nulle per $n \geq 0$.
a) Siano $x_N[n] = x[n](u[n] - u[n-N])$ e $w_N[n] = w[n](u[n] - u[n-N])$ le loro versioni troncate ai primi N campioni. Sia $y[n] = x_N[n] * w_N[n]$. Determinare la trasformata Z di $y[n]$ in funzione di $X(z)$ e di $W(z)$.
b) Sia $y[n] = x[n] * w[n]$. Sia $y_N[n] = y[n](u[n] - u[n-N])$ la versione di $y[n]$ troncata ai primi N campioni. Determinare la trasformata Z di $y_N[n]$ in funzione di $X(z)$ e di $W(z)$.

P-2.13 Verificare il teorema del valore iniziale, enunciato nell'esercizio 2.12, per la funzione $X(z) = \frac{2+z^{-1}}{2(1-z^{-1})(1-3z^{-1})}$, con $ROC_X = \{z : |z| > 3\}$.

P-2.14 Verificare il teorema del valore finale applicato alla sequenza $x[n] = 2u[n] + (1/4)^n u[n] - (-1/3)^n u[n]$.