

Banchi di filtri modulati

S. Tubaro

December 5, 2017

L'idea di base nell'ambito dei banchi di filtri modulati è quella di partire da un filtro prototipo passa-basso, $H_0(z)$, con risposta all'impulso reale, causale e con banda approssimativamente pari a $0.5/D$ (dove D rappresenta il numero totale di filtri del banco) e generare da esso tutti gli altri $D - 1$ filtri attraverso traslazioni in frequenza:

$$h_k(n) = h_0(n)e^{j(2\pi/D)kn} = h_0(n)W_D^{-kn}, \quad k = 0, 1, \dots, D - 1$$

dove $W_D = e^{-j(2\pi/D)}$.

Nel dominio z si ha

$$H_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h_k(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} h_0(n)(zW_D^k)^{-n} = H_0(zW_D^k) \quad (1)$$

e per $z = e^{j\omega}$ risulta

$$H_k(F) = H_0\left(F - \frac{k}{D}\right), \quad k = 0, 1, \dots, D - 1$$

Graficamente la disposizione in frequenza dei vari filtri è riportata nella figura (1).

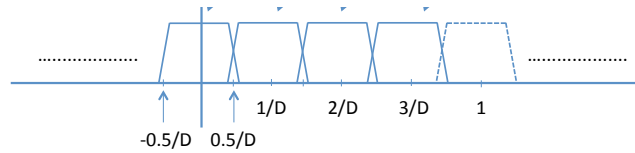


Figure 1: Disposizione in frequenza dei filtri modulati. Si è assunto $D = 4$. Si ricordi che tutto l'andamento in frequenza è periodico con passo 1.

Dal punto di vista sistemistico, considerando un banco di filtri di analisi "massimamente decimato" (che cioè genera D segnali partendo da quello di ingresso selezionando D bande diverse e facendo poi un sottocampionamento passo D) lo schema implementativo del banco di filtri modulati sarebbe quello indicato in figura (2).

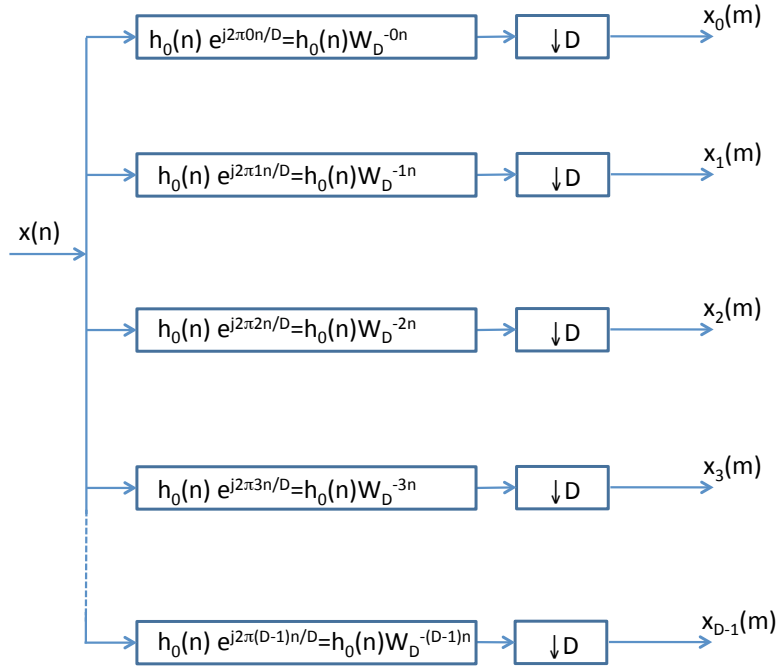


Figure 2: Schema a blocchi elementare per un banco di filtri di analisi realizzato attraverso filtri modulati.

In figura 2 le uscite dei filtri sono allocate in bande diverse, ciascuna centrata alle frequenze k/D con $k = 0, \dots, D-1$, ma a valle dei sotto-campionatori (a causa delle repliche periodiche introdotte dal campionamento stesso) le possiamo anche pensare come tutte riportate intorno a frequenza 0. Infatti se pensiamo di moltiplicare l'uscita di ciascun filtro per $e^{-j2\pi(k/D)n}$ riportiamo intorno a frequenza 0 la componente che stiamo considerando, ma a valle del sotto-campionatore il termine esponenziale diventa $e^{-j2\pi(k/D)nD} = 1$, a dimostrazione proprio del fatto che tutte le componenti $x_k(m)$ possono essere viste tutte centrate intorno a frequenza 0.

Lo schema di figura 2 è quindi equivalente a quello riportato in figura 3.

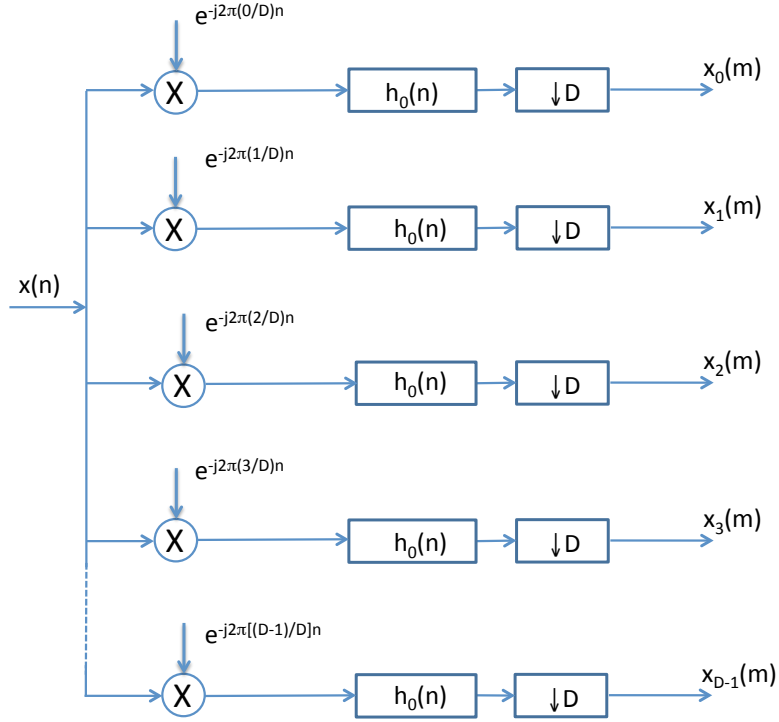


Figure 3: Schema a blocchi equivalente per un banco di filtri di analisi realizzato attraverso filtri centrati intorno a frequenza 0.

Il banco di filtri realizzato con lo schema di figura (2) è assolutamente inefficiente dal punto di vista computazionale. Per trovare una implementazione efficiente consideriamo la realizzazione polifase del filtro prototipo ($H_0(z)$):

$$H_0(z) = \sum_{m=0}^{D-1} z^{-m} P_m(z^D)$$

dove

$$P_m(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h_0(nD + m) z^{-n}$$

ricordando la relazione (1) e sostituendo quindi z con zW_D^k e ricordando che $W_D^{kD} = 1$ otteniamo

$$H_k(z) = \sum_{m=0}^{D-1} z^{-m} W_D^{-km} P_m(z^D W_D^{kD}) = \sum_{m=0}^{D-1} z^{-m} W_D^{-km} P_m(z^D)$$

Considerando tutti i possibili filtri (cioè k da 0 a $D - 1$) e scrivendo l'insieme delle relazioni in forma matriciale si ha

$$\begin{bmatrix} H_0(z) \\ H_1(z) \\ \vdots \\ H_{D-1}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W_D^{-1} & W_D^{-2} & \cdots & W_D^{-(D-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_D^{-(D-1)} & W_D^{-2(D-1)} & \cdots & W_D^{-(D-1)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0(z^D) \\ z^{-1}P_1(z^D) \\ \vdots \\ z^{-(D-1)}P_{D-1}(z^D) \end{bmatrix}$$

La relazione sopra riportata mette in luce che ogni filtro ($h_k(n)$) è ottenuto attraverso la somma delle componenti polifase del filtro di riferimento (cioè di versione sotto-campionate della sua risposta all'impulso) ciascuna pesata per un opportuno coefficiente (W_D^{lk} , dove l è l'indice delle componenti polifase). La matrice appena a destra dell'uguale è quella che, moltiplicata a destra per un vettore (di dimensioni D), genera la DFT inversa del vettore stesso a meno del fattore $1/D$. In conseguenza di ciò il banco di filtri può essere realizzato con lo schema riportato in figura (4)

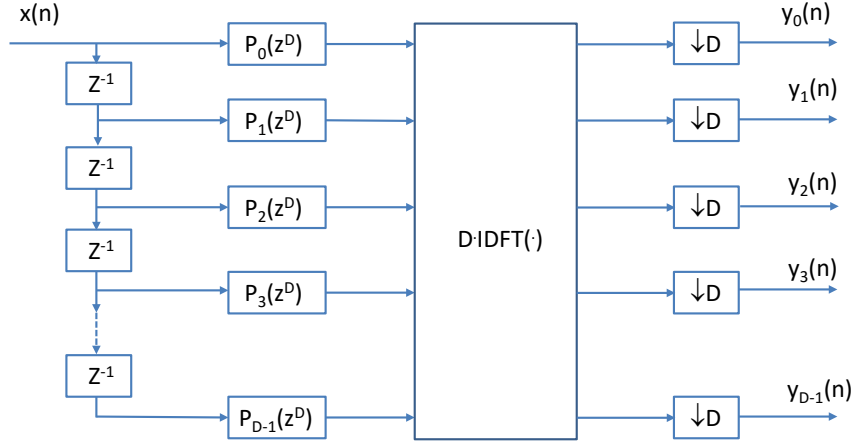


Figure 4: Schema a blocchi per un banco di filtri di analisi realizzato considerando la rappresentazione polifase del filtro prototipo.

Poichè ciascuna uscita della $IDFT(\cdot)$ è ottenuta dalla somma pesata (con coefficienti costanti) degli ingressi, l'operazione di sotto-campionamento può essere spostata a monte di essa. Ricordando inoltre le identità nobili viste quando si è parlato dei sistemi multi-rate, lo schema presentato in figura (4) può essere trasformato in quello di figura (5).

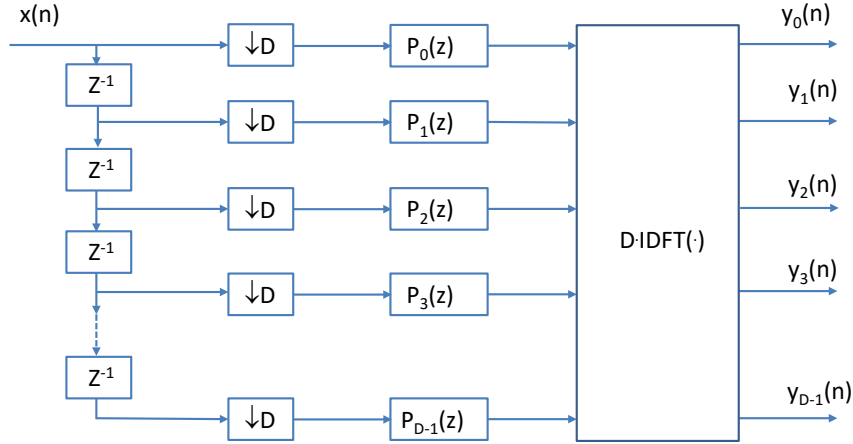


Figure 5: Schema a blocchi per l'implementazione efficiente di un banco di filtri di analisi.

Considerando la realizzazione "elementare" del banco di filtri riportata in figura (2) e supponendo di usare come filtro prototipo un FIR di lunghezza N , per l'intero banco sono necessarie $4(D \cdot N)$ moltiplicazioni reali per ogni campione di ingresso. Nel caso della implementazione efficiente di figura (5) sono richieste invece solo $N/D + 2\log_2 D$ moltiplicazioni reali nell'unità di tempo (assumendo che $x(n)$ sia caratterizzato da una frequenza unitaria dei campioni). Nell'espressione precedente il primo termine è relativo al numero di moltiplicazioni connesse a tutti i sotto-filtri considerati ($P_k(z)$). Ci sono infatti D sotto-filtri di lunghezza N/D , ma ciascuno è alimentato ad un rate D volte più basso di quello che caratterizza $x(n)$. Il termine $2\log_2 D$ è il costo computazione della $IDFT$. Il costo di una $IDFT$ (di lunghezza D) in termini di moltiplicazioni reali è $2 \cdot D\log_2 D$, ma bisogna tenere conto del fatto che si opera ad un rate D volte più basso di quello di $x(n)$.

Per un banco di filtri di sintesi realizzato con filtri modulati lo schema "elementare" è quello di figura (6) in cui $g(n) = g_0(n)$ è il filtro passa-basso prototipo. Nel caso si mettessero in cascata il sistema di figura (5) e quello di figura (6) e si avessero banchi a ricostruzione perfetta si avrebbe $u(n) = cx(n - n_0)$. Dove n_0 rappresenta il ritardo introdotto dalla cascata del filtro di analisi e sintesi.

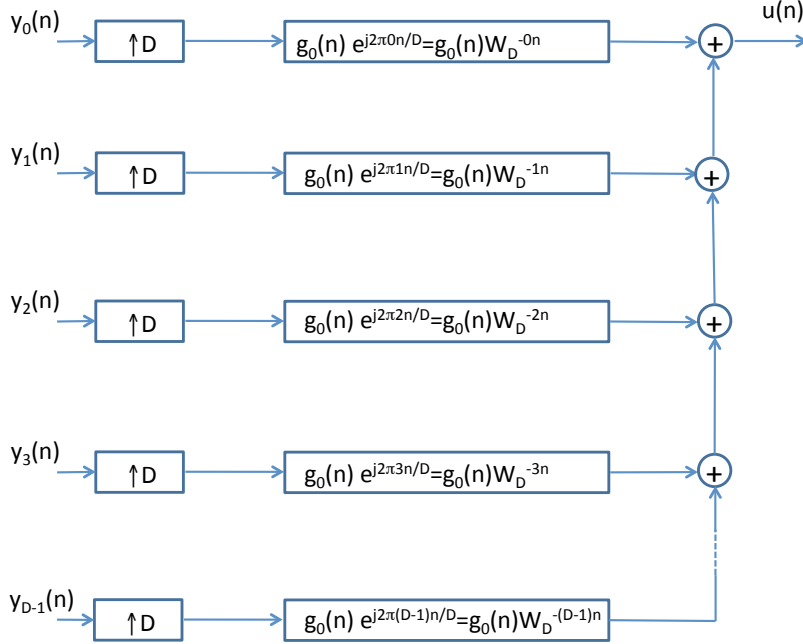


Figure 6: Schema a blocchi per l'implementazione elementare di un banco di filtri di sintesi.

E' interessante ripercorrere gli stessi passaggi fatti per il banco di analisi con la sola eccezione di considerare un modo alternativo di scrivere la composizione polifase del filtro prototipo di sintesi. In particolare consideriamo:

$$G_0(z) = \sum_{m=0}^{D-1} z^m Q_m(z^D)$$

dove

$$Q_m(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_0(nD - m) z^{-n}$$

Sulla base della relazione (1), sostituendo quindi z con zW_D^k e ricordando che $W_D^{kD} = 1$ otteniamo

$$G_k(z) = \sum_{m=0}^{D-1} z^m W_D^{km} Q_m(z^k W_D^{kD}) = \sum_{m=0}^{D-1} z^m W_D^{km} Q_m(z^k)$$

Per evitare la presenza di termini z^m (anticipi non fisicamente realizzabili quando la variabile indipendente è il tempo) possiamo aggiungere un termine di ritardo su tutti i filtri di sintesi del tipo $z^{-(D-1)}$. In questo caso l'espressione precedente diventa

$$G_k(z) = \sum_{m=0}^{D-1} z^{-(D-1)+m} W_D^{km} Q_m(z^k)$$

Considerando tutti i possibili filtri (cioè k da 0 a $D-1$) e scrivendo l'insieme delle relazioni in forma matriciale si ha

$$\begin{bmatrix} G_0(z) \\ G_1(z) \\ \vdots \\ G_{D-1}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W_D^1 & W_D^2 & \cdots & W_D^{(D-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_D^{(D-1)} & W_D^{2(D-1)} & \cdots & W_D^{(D-1)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z^{-(D-1)} Q_0(z^D) \\ z^{-(D-2)} Q_1(z^D) \\ \vdots \\ Q_{D-1}(z^D) \end{bmatrix}$$

Seguendo gli stessi ragionamenti fatti per il banco di filtri di analisi, si può, anche il banco di filtri di sintesi, realizzare una struttura computazionalmente efficiente (vedi figura 7).

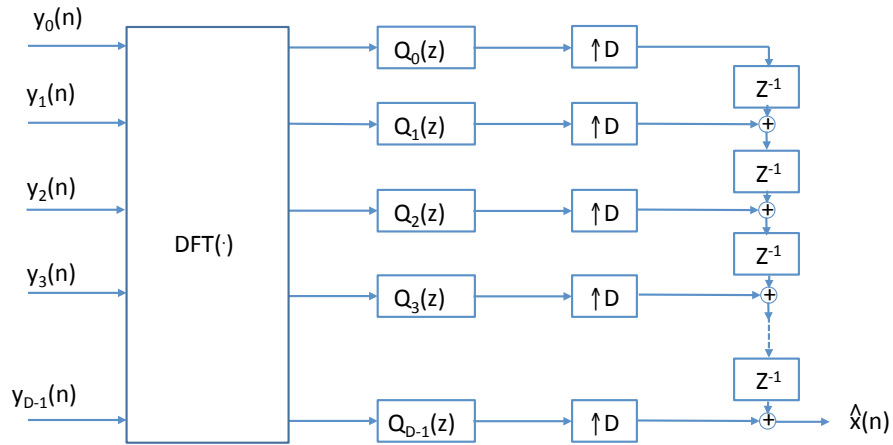


Figure 7: Schema a blocchi per l'implementazione efficiente di un banco di filtri di sintesi.

Scambiando il tipo di scomposizione polifase fra banco di analisi e sintesi si può scambiare la posizione del blocco $DFT(\cdot)$ e $D \cdot IDFT(\cdot)$.

Questa analisi dei banchi di filtri massivamente decimati mette in luce che la DFT (o la IDFT) possono essere visti come un banco di filtri di analisi. Infatti considerando un prototipo di filtro di analisi e sintesi corrispondente ad un impulso rettangolare di lunghezza D (campioni della risposta impulsiva pari a 1 dal campione di posizione 0 a quello di posizione

$D - 1$), negli schemi con la realizzazione efficiente dei banchi di analisi e sintesi (figure 5 e 7), le singole versioni polifase ($P_n(z)$ e $Q_n(z)$) diventano tutti degli impulsi unitari e quindi delle semplici costanti unitarie nel dominio z . Inoltre la cascata di un blocco DFT - IDFT (o viceversa) costituiscono un banco a ricostruzione perfetta (ciò che esce è uguale a ciò che entra).